

Suites (2)- Exercices de TD

Suites récurrentes linéaires du premier ordre

Exercice 10

Résoudre

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

Exercice 11

Résoudre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + n^2 + n \end{cases}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $u_n^* = an^2 + bn + c$.

Exercice 12

Résoudre

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 4u_n = 3n - 1 \end{cases}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $u_n^* = an + b$.

Exercice 13

Résoudre

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} = u_n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $u_n^* = nK\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Etude de suites récurrentes**Exercice 14**

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Après avoir étudié le sens de variation de g définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln(1+x) - x$, montrer que pour tout $x > 0$: $0 < \ln(1+x) < x$.
2. Montrer que pour tout entier n , u_n est strictement positif.
3. Dédire de ce qui précède que u converge.

Exercice 15

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

1. Etudier la monotonie de u .
2. En déduire que pour tout n , $u_n \geq a$.
3. On suppose que $a = \frac{1}{4}$. Représenter rapidement la suite u . La suite semble-t-elle majorée? convergente ? Démontrer ces conjectures.
4. Même question avec $a = 2$ puis $a = 0$ et enfin $a = -1$ (on utilisera le même dessin).

Exercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - 2$.

1. En étudiant la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, montrer que l'équation $f(l) = l$ a exactement deux solutions: la première comprise entre -2 et 0 et la seconde entre 0 et 2.
2. Soit la suite définie pour tout entier n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Représenter et étudier cette suite.
3. Même question avec $u_0 = 3$.

Exercice 17

Soit u définie par $u_0 = 2,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 6}$.

1. Etudier u (monotonie, convergence, limite éventuelles...)
2. Même question si $u_0 = 4$.

Exercice 18

Soit f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. Soit u la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Etudier la convergence de u .

Exercice 19

Soit f l'application définie par $f(x) = \frac{-3}{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$. Représenter graphiquement la fonction f et la suite u . Que constate-t-on ?

3. Démontrer les conjectures formulées à la question précédente.
4. Mêmes questions avec $u_0 = 0$, puis $u_0 = 5$.

Exercice 20

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{(x+1)(x-1)}{2}$. En étudiant les variations de f , montrer que pour tout $-1 \leq x \leq 1$ on a $-1 \leq f(x) \leq 1$.
2. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$. Montrer que pour tout n entier naturel on a $-1 \leq u_n \leq 1$.
3. Etudier la convergence de u .
4. Que se passe-t-il si $u_0 = -2$?

Exercice 21

Soit f l'application définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$ et que pour tout $x < 2$ on a $f(x) < 2$.
2. (a) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1.1 \end{cases}$.
 (b) Montrer que $0 < u_n < 2$ pour tout n .
 (c) Etudier la monotonie de la suite u .
 (d) u est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.
3. On suppose maintenant que $u_0 = 3$.
 (a) Quelles propriétés de u restent valables ?
 (b) Montrer que u diverge.

Exercice 22

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que u est croissante. u est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.
3. (*) "question bonus", à ne traiter que si tout le reste a été fait:
 On pose $a_n = \ln u_n$. Ecrire la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n , en déduire a_n en fonction de n puis l'égalité : $u_n = 2^{1-2^{-n}}$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.