

L2
Année 2022-2023
Second Semestre
Session initiale

UFR des Sciences Fondamentales et
Biomédicales

Faculté de Pharmacie de Paris

UE SA04U060

Corrigé de l'épreuve de physique 4

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde incluse).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs et de justifier les simplifications et les réponses données.**
- **Les calculatrices sont autorisées.**

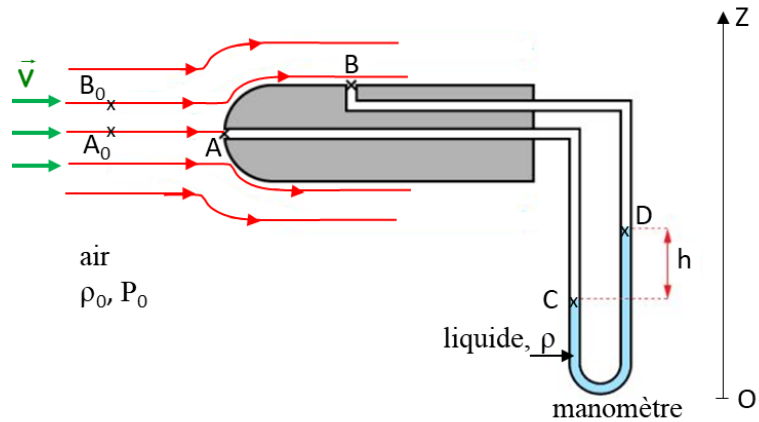
Les 3 exercices sont entièrement **indépendants**.

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Exercice 1

Les sondes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle. Elles sont utilisées pour la sécurité des avions puisqu'elles donnent une mesure à chaque instant de la vitesse d'un avion.

Dans cet exercice, on se place dans le référentiel de l'avion et on cherche à déterminer la vitesse d'écoulement de l'air à l'aide d'un tube de Pitot modélisé sur la figure de droite ci-après (la figure n'est pas à l'échelle).



Ce tube, de petite dimension pour éviter de perturber l'écoulement étudié, possède deux petites ouvertures (de quelques millimètres). L'une est située au point A, parallèlement à l'écoulement de l'air et l'autre au point B, perpendiculairement à l'écoulement de l'air.

On définit un axe (Oz) vertical ascendant.

Le tube étant très fin, on peut négliger la variation d'altitude entre les orifices A et B : $z_A \approx z_B$.

Un manomètre (tube en U) est situé en aval de ce tube. Il est rempli d'un liquide de masse volumique ρ . Il permet de mesurer la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$.

A l'intérieur du tube de Pitot, les fluides (air et liquide) sont statiques.

On considérera que la sonde est immergée dans un écoulement d'air stationnaire, unidimensionnel et horizontal. L'air est assimilé à un fluide parfait, de masse volumique ρ_0 uniforme. Loin du tube de Pitot, l'air a une pression P_0 et un vecteur vitesse $\vec{V}$ colinéaire à l'axe du tube de Pitot.

Les points A_0 et B_0 sont en amont et éloignés de la sonde, A_0B_0 étant perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

On note g la valeur de l'accélération de la pesanteur.

1. Etablir l'expression de la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$ en fonction de la dénivellation $h = z_D - z_C$ dans le manomètre, de g , ρ et ρ_0 . On tiendra compte des différences de hauteur entre les points A et C d'une part, B et D d'autre part.

- Loi de l'hydrostatique appliquée entre A et C dans l'air de masse volumique ρ_0 uniforme, l'axe (Oz) étant vertical ascendant :

$$P_A + \rho_0 g z_A = P_C + \rho_0 g z_C \Rightarrow P_A = P_C + \rho_0 g (z_C - z_A) \Rightarrow \boxed{P_A = P_C - \rho_0 g (z_A - z_C)}.$$

- De même, entre B et D, on a : $P_B + \rho_0 g z_B = P_D + \rho_0 g z_D \Rightarrow \boxed{P_B = P_D - \rho_0 g (z_B - z_D)}.$

- Loi de l'hydrostatique appliquée entre C et D dans le liquide de masse volumique ρ uniforme, l'axe (Oz) étant vertical ascendant : $P_C + \rho g z_C = P_D + \rho g z_D \Rightarrow \boxed{P_C - P_D = \rho g (z_D - z_C) = \rho g h}.$

- On a donc :

$$\Delta P = P_A - P_B = P_C - P_D - \rho_0 g (z_A - z_C) + \rho_0 g (z_B - z_D) = \rho g h + \rho_0 g (z_B - z_D - z_A + z_C).$$

$$\text{Or } z_A \approx z_B \text{ donc : } \Delta P = P_A - P_B = \rho g h + \rho_0 g (z_C - z_D) = \rho g h + \rho_0 g (-h)$$

D'où :

$$\boxed{\Delta P = P_A - P_B = (\rho - \rho_0) g h}.$$

2. Rappeler le théorème de Bernoulli en précisant les hypothèses d'application.

Théorème de Bernoulli :

Pour un fluide parfait en écoulement permanent et incompressible, en tout point d'une même ligne de courant (avec (Oz) un axe vertical ascendant), on a : $\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gz = \text{cste}$.

3. En appliquant ce théorème le long de la ligne de courant A_0A , exprimer la pression en A, P_A , en fonction des paramètres donnés dans l'énoncé. Justifier les simplifications.

Le long de la ligne de courant A_0A , pour l'air de masse volumique ρ_0 uniforme, on a :

$$\frac{1}{2}\rho_0 v_{A_0}^2 + P_{A_0} + \rho_0 g z_{A_0} = \frac{1}{2}\rho_0 v_A^2 + P_A + \rho_0 g z_A.$$

Simplifications : $z_{A_0} = z_A$, $P_{A_0} = P_0$, $v_{A_0} = V$, $v_A = 0$ (A = point d'arrêt de la ligne de courant A_0A).

On en déduit : $P_A = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 + P_0$.

4. a) Comparer les vitesses de l'air aux points B_0 et B. Justifier la réponse.

Entre B_0 et B, les lignes de courant ne s'écartent pas. Donc $S_{B_0} = S_B$ sur un tube de courant.

Grâce à la conservation du débit volumique (masse volumique ρ_0 uniforme), on déduit : $v_{B_0} = v_B$.

b) En appliquant le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant B_0B , exprimer la pression en B, P_B , en fonction de celle en B_0 , P_{B_0} . Justifier les simplifications.

Le long de la ligne de courant B_0B , pour l'air de masse volumique ρ_0 uniforme, on a :

$$\frac{1}{2}\rho_0 v_{B_0}^2 + P_{B_0} + \rho_0 g z_{B_0} = \frac{1}{2}\rho_0 v_B^2 + P_B + \rho_0 g z_B.$$

Simplifications : $z_{B_0} \approx z_B$, $P_{B_0} = P_0$, $v_{B_0} = V = v_B$. On en déduit : $P_B = P_{B_0} = P_0$.

5. Dédire des questions 3 et 4, l'expression de la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$ en fonction de la valeur V de la vitesse de l'air (dans le référentiel de l'avion) et de ρ_0 .

$$\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 + P_0 - P_0 = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 \Rightarrow \Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_0 V^2.$$

6. Dédire des questions précédentes que V s'exprime : $V = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)gh}{\rho_0}}$.

$$\text{D'après les q3 et 4 : } \Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 = (\rho - \rho_0)gh \text{ donc } V = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)gh}{\rho_0}}.$$

7. Simplifier cette expression pour $\rho \gg \rho_0$ puis calculer la vitesse V (en m/s puis en km/h) en prenant : $\rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho = 13.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $h = 3,5 \text{ cm}$.

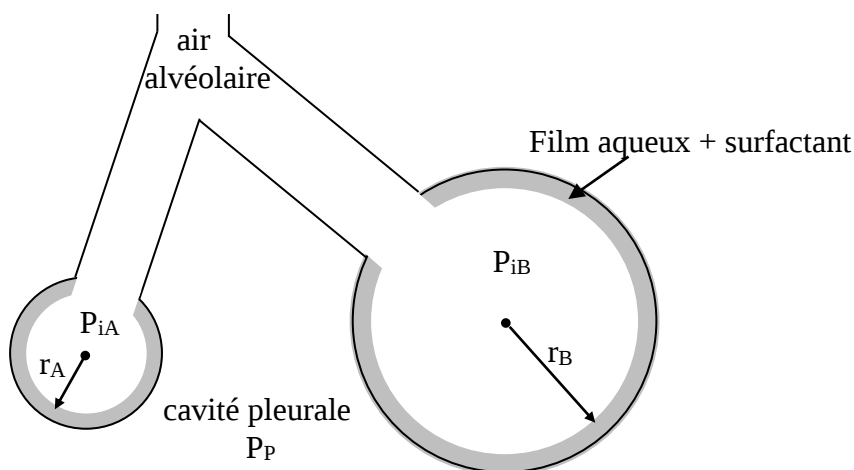
Pour $\rho \gg \rho_0$, on a :
$$V \approx \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho_0}}.$$

A.N. : $V = 83,7 \text{ m/s} = 301 \text{ km/h}$.

Exercice 2

Les alvéoles pulmonaires peuvent être assimilées à des « grappes » de gouttes sphériques reliées entre elles (image de gauche sur la page suivante). La paroi interne des alvéoles est recouverte d'un mince film aqueux en contact avec l'air alvéolaire, donnant lieu à une interface air/liquide. Ce film aqueux contient un agent tensio-actif, le surfactant pulmonaire.

On modélise deux alvéoles A et B par deux petites bulles d'air de rayons respectifs r_A et $r_B = 2r_A$ (figure de droite sur la page suivante). P_{iA} et P_{iB} sont les pressions dans les alvéoles respectivement A et B. On note γ_A et γ_B les tensions superficielles des interfaces air/liquide dans les alvéoles respectivement A et B. La pression dans le film aqueux est celle de la cavité pleurale, notée P_p .



1. Ce système est à l'équilibre.

- a) Que peut-on dire des pressions P_{iA} et P_{iB} ?

A l'équilibre, $P_{iA} = P_{iB}$.

- b) Quelle est la relation entre les tensions superficielles γ_A et γ_B ? Comparer qualitativement la densité surfacique de molécules de surfactants à l'interface air/liquide dans chaque alvéole.

D'après la loi de Laplace : $\Delta P = P_{iA} - P_p = \frac{2\gamma_A}{r_A} = P_{iB} - P_p = \frac{2\gamma_B}{r_B}$. Or $r_B = 2r_A$ donc $\gamma_B = 2\gamma_A$.

Les molécules tensioactives sont composées d'une partie polaire et d'une partie apolaire. Adsorbées à l'interface air/liquide, elles abaissent d'autant plus la tension superficielle de cette interface que leur densité surfacique (nombre de molécules par unité de surface) est grande.

La tension superficielle dans la grande alvéole (alvéole B) étant plus élevée que dans la petite alvéole (alvéole A), la densité surfacique de surfactants est plus faible dans l'alvéole B.

2. La surpression dans l'alvéole A est égale à 4 mm Hg. Son rayon est $r_A = 0,05 \text{ mm}$.

a) Calculer numériquement les tensions superficielles γ_A et γ_B .

$$\Delta P = P_{iA} - P_p = \frac{2\gamma_A}{r_A} = P_{iB} - P_p = \frac{2\gamma_B}{r_B} = 4 \text{ mmHg}.$$

$$\text{Donc : } \gamma_A = \frac{4 \cdot 10^5}{760} \times \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2} = \underline{13,2 \text{ mN.m}^{-1}} \text{ et } \gamma_B = 2\gamma_A = \underline{26,3 \text{ mN.m}^{-1}}.$$

b) Calculer numériquement les énergies de surface E_{S_A} et E_{S_B} respectivement dans l'alvéole A et dans l'alvéole B.

- Dans l'alvéole A : $E_{S_A} = \gamma_A \times 4\pi r_A^2 = \underline{4,15 \cdot 10^{-10} \text{ J}}.$

- Dans l'alvéole B : $E_{S_B} = \gamma_B \times 4\pi r_B^2 = \underline{3,32 \cdot 10^{-9} \text{ J}}.$

N.B. : $E_{S_B} = 2\gamma_A \times 4\pi r_A^2 = 8E_{S_A}.$

3. Ce système des 2 alvéoles pourrait-il être à l'équilibre si la paroi interne des alvéoles était recouverte d'un film d'eau pure uniquement ? Si ce n'est pas le cas, comment évoluerait-il ? Justifier les réponses.

Si la paroi interne des alvéoles était recouverte d'un film d'eau pure uniquement, la tension superficielle serait la même dans les deux alvéoles, donc on aurait, avec $r_A < r_B$:

$$\Delta P = P_{iA} - P_p = \frac{2\gamma}{r_A} > P_{iB} - P_p = \frac{2\gamma}{r_B}, \text{ d'où : } P_{iA} > P_{iB}.$$

Il ne pourrait donc pas y avoir d'équilibre possible et la petite alvéole se viderait dans la grande !

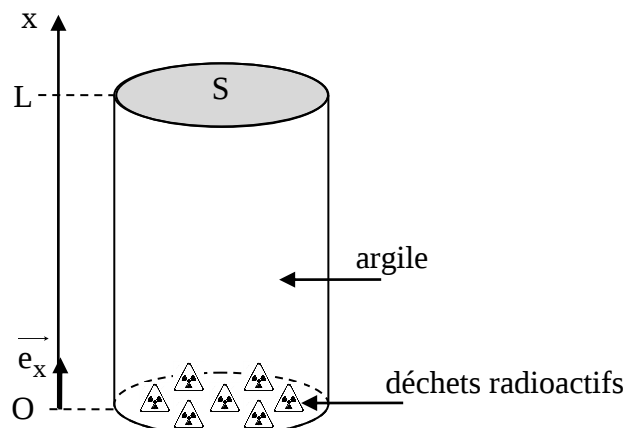
Exercice 3

Des déchets nucléaires sont stockés en couche géologique profonde. Celle-ci est modélisée par une couche d'argile d'épaisseur $L = 50 \text{ m}$ au-dessus de laquelle se trouve la biosphère (zone de la Terre occupée par les organismes vivants).

Les déchets sont confinés dans des colis en acier afin de retarder leur contact avec l'argile.

On s'intéresse à une fuite de déchets radioactifs et plus précisément aux particules radioactives susceptibles de diffuser dans l'argile environnante.

On suppose que le transport des particules radioactives dans l'argile est unidimensionnel, selon un axe (Ox) ascendant, de vecteur unitaire $\vec{e}_x$.



Simultanément à la diffusion, une partie des particules radioactives se fixe dans l'argile (phénomène de sorption).

La concentration totale des particules radioactives s'écrit alors : $C_T(x,t) = C(x,t) + C_f(x,t)$ où $C(x,t)$ et $C_f(x,t)$ représentent respectivement la concentration des particules mobiles et la concentration des particules fixées en x , à l'instant t . Ces deux concentrations sont liées par la relation : $C_f(x,t) = K_s C(x,t)$ où K_s est une constante.

Le vecteur densité de flux de particules radioactives dans l'argile, $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e}_x$, est relié au gradient de concentration en particules mobiles selon la première loi de Fick et au coefficient de diffusion libre D d'une particule radioactive dans l'argile.

On néglige toute décroissance radioactive des concentrations, toute force extérieure sur les particules radioactives et on considère que la température est constante dans la couche d'argile.

1. Le but de cette question est de déterminer l'équation vérifiée par $C(x,t)$. Pour cela, nous allons faire un bilan de matière dans un volume élémentaire dV d'argile de section S , compris entre les abscisses x et $x + dx$. Soit $n(x, t)$ le nombre de particules radioactives dans le volume dV à l'instant t , et $n(x, t + dt)$ celui à l'instant $t + dt$. On définit également δN_e le nombre de particules radioactives entrant dans le volume dV pendant dt et δN_s le nombre de particules radioactives sortant du volume dV pendant dt .

- 1.1 Exprimer la variation pendant dt , du nombre de particules radioactives dans le volume dV , soit $n(x, t + dt) - n(x, t)$, en fonction de δN_e et δN_s .

Par conservation du nombre de particules radioactives dans le volume dV , on a :

$$n(x, t + dt) - n(x, t) = dN_e - dN_s.$$

- 1.2 Exprimer δN_e en fonction de la densité locale de flux de particules radioactives et des autres données de l'exercice.

$$dN_e = j(x,t)Sdt.$$

- 1.3 Exprimer δN_s en fonction de la densité locale de flux de particules radioactives et des autres données de l'exercice.

$$dN_s = j(x + dx, t)Sdt.$$

- 1.4 Exprimer $n(x, t + dt) - n(x, t)$ en fonction de $C_T(x, t)$, $C_T(x, t + dt)$ et des autres données de l'exercice puis montrer que $n(x, t + dt) - n(x, t)$ vérifie la relation :

$$n(x, t + dt) - n(x, t) = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t} S dt dx.$$

Par ailleurs, $n(x, t) = C_T(x, t)Sdx$ et $n(x, t + dt) = C_T(x, t + dt)Sdx$ donc :

$$n(x, t + dt) - n(x, t) = C_T(x, t + dt)Sdx - C_T(x, t)Sdx = (C_T(x, t + dt) - C_T(x, t))Sdx = \frac{\partial C_T(x, t)}{\partial t} dt Sdx$$

Or $C_T(x, t) = C(x, t) + C_f(x, t) = C(x, t) + K_s C(x, t) = (1 + K_s)C(x, t)$ avec $K_s = \text{cste}$.

$$\text{Ainsi : } n(x, t + dt) - n(x, t) = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t} S dt dx.$$

1.5 Déduire des questions précédentes la relation entre les dérivées partielles $\frac{\partial C}{\partial t}$ et $\frac{\partial j}{\partial x}$.

En reprenant les résultats des questions précédentes :

$$n(x, t + dt) - n(x, t) = \delta N_e - \delta N_s = j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t} Sdt dx$$

$$\Leftrightarrow (j(x, t) - j(x + dx, t))Sdt = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t} Sdt dx \Leftrightarrow -\frac{\partial j}{\partial x} dx Sdt = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t} Sdt dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{\partial j}{\partial x} = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t}}.$$

1.6 Rappeler la première loi de Fick dans la géométrie de l'exercice.

1^{ère} loi de Fick (diffusion seule) : $\boxed{j = -D \frac{\partial C}{\partial x}}.$

1.7 En déduire que $C(x, t)$ vérifie l'équation de transport : $D' \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$ où D' est un coefficient de diffusion apparente prenant en compte le phénomène de sorption, que l'on exprimera en fonction de D et K_s .

En remplaçant dans $-\frac{\partial j}{\partial x} = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t}$, on obtient : $D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = (1 + K_s) \frac{\partial C}{\partial t}$, soit :

$$\frac{D}{1 + K_s} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \text{ ou encore : } D' \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \text{ avec } \boxed{D' = \frac{D}{1 + K_s}}.$$

On se place désormais en régime permanent.

2. A partir de l'équation de transport, déterminer l'expression de $C(x)$ sachant que $C(x=0) = C_0$ et $C(x=L) = 0$.

En régime permanent : $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ et $C(x, t) = C(x) \Rightarrow D' \frac{d^2 C}{dx^2} = 0$. Or $D' \neq 0$, donc $\frac{d^2 C}{dx^2} = 0$.

En intégrant deux fois, on obtient pour $C(x)$ l'équation d'une droite : $C(x) = Ax + B$.

En appliquant les conditions aux limites $C(x=0) = C_0$ et $C(x=L) = 0$:

$$\begin{cases} C(0) = C_0 = B \\ C(L) = AL + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C_0 \\ A = -\frac{B}{L} = -\frac{C_0}{L} \end{cases} \text{ d'où : } \boxed{C(x) = -\frac{C_0}{L} x + C_0 = C_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)}.$$

3. Une expérience modèle, réalisée avec des cations lithium Li^+ dans une argile, a permis de mesurer un flux molaire de Li^+ de 5.10^{-5} mol/jour avec les données suivantes :

$$C_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}, S = 30 \text{ cm}^2 \text{ et } L = 0,5 \text{ cm.}$$

- 3.1 En déduire la valeur du coefficient de diffusion libre D .

$$J = jS = -D \frac{dC}{dx} S = -DAS = D \frac{C_0}{L} S \Rightarrow D = \frac{JL}{SC_0} = \frac{5.10^{-5} \times 5.10^{-3}}{24 \times 3600 \times 10 \times 30.10^{-4}} = \underline{9,65.10^{-11} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}} .$$

- 3.2 Sachant que cette expérience a permis d'estimer la valeur de D' , $D' = 2,41.10^{-12} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, en déduire la valeur de K_s .

$$D' = \frac{D}{1 + K_s} \Rightarrow 1 + K_s = \frac{D}{D'} \Rightarrow K_s = \frac{D}{D'} - 1 = 39 .$$

- 3.3 A l'aide des valeurs de D et D' obtenues grâce à cette expérience modèle, déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire à un cation lithium pour atteindre la biosphère, en présence et en l'absence du phénomène de sorption. On rappelle que dans ce cas, $L = 50 \text{ m}$. On exprimera ces durées en seconde puis en année (1 année = 365 jours). Conclure.

La diffusion se fait à une dimension (seule variable d'espace = x) : $L^2 = 2Dt$.

Ainsi, en l'absence de sorption : $t = \frac{L^2}{2D} = 1,3.10^{13} \text{ s} = 1,5.10^8 \text{ j} = \underline{4,1.10^5 \text{ années}} .$

En présence de sorption : $t' = \frac{L^2}{2D'} = 5,2.10^{14} \text{ s} = 6,0.10^9 \text{ j} = \underline{1,6.10^7 \text{ années}} .$

N.B. : $\frac{t'}{t} = \frac{D}{D'} = 1 + K_s = 40 .$