



PRÉPA À LA PRÉPA EN TERMINALE

Exercices

MATHÉMATIQUES

STAGE 1

PLUS QUE DU SOUTIEN SCOLAIRE, UN ACCOMPAGNEMENT VERS LA RÉUSSITE

Séance 1 : L'ensemble des nombres réels

Exercices

I Manipulation d'inégalités

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Montrer que pour tous réels x et y , on a : $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 2.

Montrer que pour tous réels x et y , on a :

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$$

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Exercice 3.

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|-x + 2| \leq 1$;

2. $|3x + 2| < |-4x + 12|$.

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes.

1. $\sqrt{x-2} = 3 - x$;

2. $x = \sqrt{x+11} - 5$.

Exercice 5.

Soient x et y deux réels positifs ou nuls.

1. Montrer que : $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2. En déduire que si $x \geq y$, on a : $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

3. Montrer que : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

III Partie entière

Pour bien démarrer

Exercice 6.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité proposée.

1. $3n - 4 \geq A$

2. $n^2 + 2n + 1 \geq A$

3. $\sqrt{n^2 + 2n + 3} \geq A$

Exercice 7.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité proposée.

1. $-\varepsilon \leq \frac{1}{4+n} \leq \varepsilon$

2. $\left| \frac{n-1}{n+2} - 1 \right| \leq \varepsilon$

3. $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n + 5}} \leq \varepsilon$

Exercices avancés

Exercice 8.

1. Montrer que pour tous réels x et y , $x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
2. Montrer que pour tout réel x et pour tout entier relatif n , $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
3. Montrer que pour tout réel x non entier, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
4. Montrer que pour tous réels x et y , $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
5. Montrer que pour tous réels x et y : $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0; 1\}$.

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\lfloor 2x + 2 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$.

IV Propriété de la borne supérieure

Exercice 10.

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que A est bornée et $B \subset A$.

1. Justifier l'existence des nombres $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$.
2. Comparer ces nombres.

Exercice 11.

Dans ce qui suit, A désigne une partie de E , déterminer, lorsqu'ils existent, les nombres $\min(A)$, $\max(A)$, $\inf_E(A)$, $\inf_{\mathbb{R}}(A)$, $\sup_E(A)$ et $\sup_{\mathbb{R}}(A)$.

1. $A = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $E = \mathbb{N}$;
2. $A = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$ dans $E = \mathbb{Q}$;
3. $A = \{2^r, r \in \mathbb{Q}_+\}$ dans $E = \mathbb{R}$.

Exercice 12.

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

On note : $-A = \{-a; a \in A\}$.

1. Montrer que $-A$ est bornée.
2. Montrer, après avoir justifié l'existence de ces nombres, que :

$$\begin{cases} \sup(-A) = -\inf(A) \\ \inf(-A) = -\sup(A) \end{cases}.$$

Exercice 13.

1. Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
2. Montrer que toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Séance 2 : Les suites numériques

Exercices

I Limite d'une suite réelle

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Soit $A \geq 0$, dans chacun des cas suivants, déterminer un rang à partir duquel l'inégalité proposée est vérifiée.

1. $5n + \cos n \geq A$

2. $\frac{7^n}{4^{n+2}} \geq A$

3. $-n^4 - e^{-2n^2+1} \leq -A$

Exercice 2.

Soit $\varepsilon > 0$, dans chacun des cas suivants, déterminer un rang à partir duquel l'inégalité proposée est vérifiée.

1. $-\varepsilon \leq \frac{1 + (-1)^n}{2n^2} \leq \varepsilon$

2. $\left| \frac{4n + \cos 2n}{3n} - \frac{4}{3} \right| \leq \varepsilon$

3. $\left| \frac{0.3^n - 1}{2^n + 1} \right| \leq \varepsilon$

Exercices avancés

Exercice 3.

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente. On raisonne par l'absurde en supposant donc l'existence de deux réels distincts, l_1 et l_2 tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_2 . On suppose en outre que $l_1 < l_2$.

1. Justifier l'existence d'un entier naturel n_1 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_n - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.

2. Justifier l'existence d'un entier naturel n_2 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_n - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.

3. En déduire l'existence d'un entier naturel n_0 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2}$ et $|u_n - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.

4. Conclure.

Exercice 4.

1. En utilisant la définition, montrer que la suite $\left(\frac{n-1}{n+3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

2. En utilisant la définition, montrer que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 5.

Montrer que toute suite convergente est bornée.

II Opérations sur les limites

Pour bien démarrer

Exercice 6.

Déterminer la limite de chacune des suites dont on donne le terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 2n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3n^3 + 2n^2 + 5n - 6$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4n - 9}{n^2 + 9}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-2n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 7n^2 - 1}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Exercice 7.

Déterminer la limite de chacune des suites dont on donne le terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n 3^n}{(-0.1)^n}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-4)^{n+1}}{5^{2n}}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n + (-3)^n}{5^n + 3(-1)^n}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{e^k}$

Exercices avancés

Exercice 8.

L'objectif de cet exercice est de montrer que la somme de suites convergentes est une suite convergente de limite la somme des limites. Soient donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives l et l' , montrons que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $l + l'$. Fixons $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence d'un entier naturel n_1 tel que pour tout $n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket$, on a : $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Justifier l'existence d'un entier naturel n_2 tel que pour tout $n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket$, on a : $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$, on a : $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

4. Conclure.

Exercice 9.

Montrer que la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite minorée est une suite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 10.

Montrer que le produit d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang est une suite divergeant vers $+\infty$

III Théorèmes d'existence

Pour bien démarrer

Exercice 11.

Étudier la convergence des suites dont on donne ci-dessous le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 + 5n}{3n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n^2 + (-1)^n}{5n^2 + n(-1)^n}$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1.8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$.

1. Démontrer que la suite est bornée par 1 et 2.
2. Démontrer que la suite est décroissante.
3. En déduire que la suite est convergente et préciser sa limite.

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 15, +\infty[$], on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \llbracket 15, +\infty[$], on a : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-15} u_{15}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercices avancés

Exercice 14.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite l ssi les suites extraites $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limite l .

Séance 3 : Limites de fonctions

Exercices

I Définitions et premières propriétés

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Étudier les limites aux bornes de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2x + |x|}$.

Exercices avancés

Exercice 2.

Montrer que $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est décroissante au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

En utilisant la définition, montrer que $f : x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$ tend vers $+\infty$ en 1.

II Opérations sur les limites

Pour bien démarrer

Exercice 4.

Déterminer les limites aux bornes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto -4x^3 + 5x^2 + x + 1$

5. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$

2. $x \mapsto \frac{4}{x^2 - 9}$

6. $x \mapsto (e^x + 1)(5 - e^{-x})$

3. $x \mapsto \frac{-2x^2 + 1}{x - 1}$

7. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

8. $x \mapsto \frac{3}{2 + e^x}$

Exercice 5.

Déterminer les limites aux bornes de chacune des fonctions définies ci-après.

1. $f(x) = 5x^2 + 3x - \frac{19}{x}$

5. $f(x) = \frac{-3x^2 + 18x - 22}{x^2 - 6x + 9}$

2. $f(x) = 1 - x - 2e^x$

6. $f(x) = e^{3x-2}$

3. $f(x) = e^x \left(-5 + \frac{2}{x}\right)$

4. $f(x) = \frac{-4 + 3x}{3 - x}$

7. $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$

Exercice 6.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$), soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Déterminer les valeurs des réels b, c et d sachant que :

- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$;
- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Exercices avancés

Exercice 7.

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x^n - a^n} \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Exercice 8.

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 + x} - \sqrt{x^3 + 1} \right);$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right).$$

III Théorèmes d'existence

Pour bien démarrer

Exercice 9.

Déterminer les limites aux bornes de chacune des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto x^3 - \cos(x)$$

$$3. f : x \mapsto \frac{5 \sin(x) - 2x}{x - 3}$$

$$2. f : x \mapsto x^2 + x \sin(x)$$

$$4. f : x \mapsto \frac{x \sin(x)}{x^2 + 2 \cos^2(x)}$$

Exercice 10.

Étudier les limites aux bornes de chacune des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

$$2. f : x \mapsto x + \lfloor x \rfloor$$

$$3. f : x \mapsto x \lfloor x \rfloor$$

Exercices avancés

Exercice 11.

Étudier les limites aux bornes de $f : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 12.

Montrer que $x \mapsto \sin(\cos x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 13.

Étudier les limites aux bornes des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \cos(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$2. x \mapsto \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$3. x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 14.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

On admettra que tout nombre réel est limite d'une suite croissante de nombres rationnels et d'une suite décroissante de nombres rationnels.

Séance 4 : Continuité

Exercices

I Définitions et premières propriétés

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Déterminer les réels a et b tels que la fonction définie ci-dessous soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{2x-1}{x^2-2} & \text{si } |x| \geq 3 \\ ax+b & \text{si } x \in]-3, 3[\end{cases}$$

Exercice 2.

Étudier la continuité de chacune des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. f: x \longmapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} & 4. f: x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x < 1, x \neq 0 \\ \frac{e-1}{2} \times \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ 2. f: x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} & \\ 3. f: x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{e-1}{2} \times \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases} & \end{array}$$

Exercice 3.

Étudier la continuité de chacune des fonctions suivantes.

$$1. f: x \longmapsto \lfloor x \rfloor \qquad 2. f: x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor 1-x \rfloor \qquad 3. f: x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^{2021}$$

Exercices avancés

Exercice 4.

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de $x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor} \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right)$.

Exercice 5.

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ appartiennent à $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6.

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice 7.

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

II Deux théorèmes fondamentaux

Pour bien démarrer

Exercice 8.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2(1 - e^{x-4}) \quad \text{et} \quad g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera α dans la suite.
2. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, donnée par $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x = k$ admet une unique solution strictement positive.
2. Montrer que cette solution appartient à $]0, 1[$ si $n > k$.

Exercice 10.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^2$.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera u_n dans la suite.
2. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n}$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie.

Exercices avancés

Exercice 12.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que $f(a) = g(b) = 1$ et $f(b) = g(a) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 2020!g(c)$.

Exercice 13.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(a + \frac{1}{2}\right) = f(a)$.

Exercice 14.

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) = 1$.

Exercice 15.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $f([a, b]) \subset [a, b]$, alors f admet un point fixe.
2. Le résultat demeure-t-il vrai si $[a, b] \subset f([a, b])$?

Exercice 16.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$.

Séance 5 : Bilan

I L'ensemble des nombres réels

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x^2 + 3x - 4} < \sqrt{2 - x}$;

2. $\sqrt{5 - x} \leq x + 3$.

Exercice 2.

Montrer que pour tous réels x, y, z , on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 3.

Montrer que pour tous $x, y \in [-1, 1]$, on a :

$$|x^3 - y^3| \leq 3|x - y|$$

Exercice 4.

On dit qu'une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle I ssi il existe un réel $k \geq 0$ tel que pour tous réels x, y dans I , on a : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Soit f une fonction affine. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que la fonction carré est lipschitzienne sur $[a; b]$.
3. Montrer que la fonction valeur absolue est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est lipschitzienne sur $[0, 2]$.

Exercices avancés

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

2. En déduire la partie entière de $S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\lfloor 2x - 2 \rfloor = \lfloor 2 - x \rfloor$.

Exercice 7.

Dans ce qui suit, A désigne une partie de E , déterminer, lorsqu'ils existent, les nombres $\min(A)$, $\max(A)$, $\inf_E(A)$, $\inf_{\mathbb{R}}(A)$, $\sup_E(A)$ et $\sup_{\mathbb{R}}(A)$.

1. $A = \{n(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $E = \mathbb{Z}$;
2. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ dans $E = \mathbb{Q}$;
3. $A = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n+1} - n^2, n \in \mathbb{N} \right\}$ dans $E = \mathbb{Q}$.

Exercice 8.

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

On note :

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$

$$AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer que $A + B$ est bornée et :

$$\begin{cases} \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \\ \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \end{cases}$$

2. On suppose de plus que A et B sont inclus dans $\mathbb{R}_+$.

(a) Montrer alors que AB est bornée et :

$$\begin{cases} \sup(AB) = \sup(A) \sup(B) \\ \inf(AB) = \inf(A) \inf(B) \end{cases}$$

(b) Ce résultat demeure-t-il vrai si on ne suppose plus que A et B sont inclus dans $\mathbb{R}_+$?

II Les suites numériques

Pour bien démarrer

Exercice 9.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l' . Montrer que les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \min(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad t_n = \max(u_n, v_n)$$

convergent respectivement vers $\min(l, l')$ et $\max(l, l')$.

Exercice 10.

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + n - 2$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, $b_n \geq n - 3$.
2. En déduire la limite de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = 2, v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Montrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3u_n + 4v_n$ est une suite constante.
4. En déduire la limite commune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 12.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 2 \end{cases}$$

On pourra commencer par raisonner sur un graphique.

Exercices avancés

Exercice 13.

Étudier la convergence des suites dont on donne ci-dessous le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2} ([x] + [2x] + \cdots + [nx])$ (où x est un réel fixé).

Exercice 14.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = 0, v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et convergent vers un même réel que l'on déterminera.

Exercice 15.

1. Montrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite convergente est convergente.
2. Montrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée est convergente.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leq \frac{1}{2^p}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 16.

Étant données deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0; 1]$.

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. On précisera leurs limites.

III Limites et continuité

Pour bien démarrer

Exercice 17.

Étudier les limites aux bornes de chacune des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto x \cos(x) \qquad 2. f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x + \cos(x)} \qquad 3. f : x \mapsto \frac{x \cos(x)}{x^2 + x}$$

Exercice 18.

Étudier les limites aux bornes de chacune des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto x^2 + (-1)^{\lfloor x \rfloor} \qquad 2. f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \qquad 3. f : x \mapsto \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$$

Exercice 19.

Soit a un réel et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = 2x^3 + x^2 + a$$

Étudier selon les valeurs de a le signe de f_a .

Exercice 20.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$.

Exercice 21.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Déterminer le nombre de points fixes de f .

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + x$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée x_n dans la suite.

2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$$

4. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis celle de la suite $\left(\frac{x_n}{\ln n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercices avancés

Exercice 23.

On dit qu'une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle I ssi il existe un réel $k \geq 0$ tel que pour tous réels x, y dans I , on a : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrer que si f est lipschitzienne sur I , alors f est continue sur I .

Exercice 24.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

Exercice 25.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que si $|f|$ est constante sur $\mathbb{R}$, alors f l'est aussi.

Exercice 26.

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 27.

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$. On suppose que f possède des limites finies en a et en b .

1. Montrer que f est bornée.

2. En supposant que a et b sont des réels, f possède-t-elle un maximum et un minimum ?

Exercice 28.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(2x) - f(x) = x.$$