

CONCOURS BLANC N°1 MATHS II

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements auront une part importante dans la notation de la copie. Changez de page pour chaque exercice ou problème. Pensez à inscrire le numéro de la question et de l'exercice. Numérotez vos pages. Encadrez les résultats finaux. Utilisez une règle.

Ce sujet comprend deux exercices indépendants, et cinq pages. Vérifiez avant de composer que vous avez l'intégralité du sujet.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie, et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Dans tout le sujet, on pourra utiliser le résultats suivant (en les citant, et si besoin en vérifiant les hypothèses).

Proposition (Linéarité de l'espérance). *Soient X, Y deux variables aléatoires finies définies sur un même espace probabilisé, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y).$$

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10€ pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10€ pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'évènement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X , puis vérifier que $\mathbf{P}(A) = \frac{13}{27}$.
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie on revient au cas général où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur n et p pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

4. a) On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.
b) Démontrer que : $\mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{P}(A) - 1$.
5. a) Donner la loi de X .
b) En déduire qu'on a également :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que $\mathbf{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.

6. Exprimer alors la valeur de $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n et p .
7. Démontrer que :

$$\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair} \gg \right].$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbf{E}(G) \leq 0$).

8. Exprimer G en fonction de X et Y . En déduire que :

$$\mathbf{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbf{P}(X = k).$$

9. Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

10. Montrer que : $\mathbf{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

11. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \\ \mathbf{E}(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

12. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in [0, \frac{1}{2}]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Solution de l'exercice 1

1. La variable aléatoire X correspond au nombre de succès (nombre de piles obtenus) dans une **répétition** de trois épreuves de Bernoulli **indépendantes**, de **même probabilité de succès** $\frac{2}{3}$ (le lancer d'une pièce). Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $3, \frac{2}{3}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

On a alors :

$$A = [X = 0] \cup [X = 2],$$

et donc, ces évènements étant disjoints :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}([X = 0] \cup [X = 2]) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2) && \text{incompatibilité} \\ &= \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 && \text{loi binomiale} \\ \mathbf{P}(A) &= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}. \end{aligned}$$

2. On observe les égalités suivantes :

$$[X = 0] = [G = 0], \quad [X = 1] = [G = -10],$$

$$[X = 2] = [G = 20], \quad [X = 3] = [G = -30].$$

Donc $\{-30, -10, 0, 20\} \subset G(\Omega)$. Par ailleurs, la famille $([X = k])_{k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements, donc pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $X(\omega) = k$, et $G(\omega) \in \{-30, -10, 0, 20\}$.

On a bien :

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

En reprenant les égalités ci-dessus, on en déduit la loi de G :

$$\mathbf{P}(G = -30) = \frac{8}{27}, \quad \mathbf{P}(G = -10) = \frac{6}{27}, \quad \mathbf{P}(G = 0) = \frac{1}{27}, \quad \mathbf{P}(G = 20) = \frac{12}{27}.$$

3. Calculons l'espérance de G . On a :

$$\mathbf{E}(G) = -30\mathbf{P}(G = -30) - 10\mathbf{P}(G = -10) + 20\mathbf{P}(G = 20)$$

$$\mathbf{E}(G) = -\frac{20}{9}.$$

On observe que l'espérance de gain est strictement négative. Le jeu n'est donc pas favorable au joueur.

4. a) Notons que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$. On en déduit immédiatement :

$$Z(\Omega) = \{0, 1\}.$$

Par définition, Z suit une loi de Bernoulli, de paramètre $\mathbf{P}(Z = 1)$. Par ailleurs :

$$[Z = 1] = [Y = 1] = [X = 0] \cup [X = 2] = A.$$

Donc, Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

- b) Comme $Y = 2Z - 1$, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{E}(Z) - 1 = 2\mathbf{P}(A) - 1.$$

5. a) Comme à la question 1, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Donc :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \text{et : } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- b) Y est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance. Par **formule de transfert**, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}((-1)^X) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbf{P}(X = k) && \text{formule de transfert} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{loi de } X \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\
 &= (1-p-p)^n && \text{binôme de Newton} \\
 \mathbf{E}(Y) &= (1-2p)^n.
 \end{aligned}$$

6. On en déduit que

$$2\mathbf{P}(A) - 1 = (1-2p)^n,$$

et donc que :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

7. On a :

$$\begin{aligned}
 \left(\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \right) &\Leftrightarrow ((1-2p)^n \geq 0) \\
 &\Leftrightarrow ((n \text{ pair}) \text{ ou } (1-2p \geq 0)) \\
 \left(\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \right) &\Leftrightarrow \left((n \text{ pair}) \text{ ou } (p \leq \frac{1}{2}) \right).
 \end{aligned}$$

8. On a :

$$G = (-1)^X 10X = 10XY.$$

Par **formule de transfert**, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(G) &= \mathbf{E}((-1)^X 10X) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k 10k \mathbf{P}(X = k) \\
 &= 10 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k (-p)^k (1-p)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

9. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On vous demande de redémontrer la petite formule, qui est du

cours pour vous, vous faites le calcul.

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
 k \binom{n}{k} &= n \binom{n-1}{k-1}.
 \end{aligned}$$

10. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10} \mathbf{E}(G) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k (-p)^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k (-p)^k (1-p)^{n-k} && \text{premier terme nul} \\
 &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k} && \text{question 9} \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^{j+1} (1-p)^{n-1-j} && \text{linéarité et } j = k-1 \\
 &= -np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j} && \text{linéarité} \\
 &= -np(-p+1-p)^{n-1} && \text{binôme de Newton} \\
 \mathbf{E}(G) &= -10np(1-2p)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

11. Comme à la question 7, on remarque que :

$$(\mathbf{E}(G) \leq 0) \Leftrightarrow \left(p \leq \frac{1}{2} \right) \text{ ou } (n \text{ impair}).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \right) \text{ et } (\mathbf{E}(G) \leq 0) \right) &\Leftrightarrow \left(p \leq \frac{1}{2} \right) \text{ ou } (n \text{ impair}) \text{ et } \left((n \text{ pair}) \text{ ou } \left(p \leq \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\left(p \leq \frac{1}{2} \right) \text{ et } ((n \text{ pair}) \text{ ou } (n \text{ impair})) \right) \\
 \left(\left(\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \right) \text{ et } (\mathbf{E}(G) \leq 0) \right) &\Leftrightarrow \left(p \leq \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

12. a) Soit

$$f : \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x(1-2x)^{n-1} \end{cases}$$

f est une fonction polynomiale, de degré n , de racines 0 et $\frac{1}{2}$. Elle est dérivable, et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2} \right], f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On en déduit :

- f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$
 - f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$.
- b) f atteint son maximum en $\frac{1}{2n}$, donc la valeur de p qui maximise le gain du forain est donc $p = \frac{1}{2n}$.

Exercice 2

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, "au hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Partie I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs possibles pour la variable Y .
2. a) Déterminer $\mathbf{P}(Y = 1)$.
b) Pour tout entier k compris entre 1 et $b + 1$, calculer la valeur de $\mathbf{P}(Y = k)$.
3. Vérifier que

$$\mathbf{P}(Y = b + 1) = \frac{b!}{N^b},$$

et que pour tout k compris entre 1 et b , la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{b!}{(b - (k - 1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k}.$$

4. Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

5. En déduire que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b - k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geq 1$, q_n la probabilité de l'évènement, noté N_n : "la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est noire"
- pour tout entier $n \geq 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues lors des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$.
- Pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'évènement : "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires."

On remarquera que $p_{0,0} = 1$, et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$ (on différenciera suivant $n > b$ et $n \leq b$).
7. Démontrer la formule suivante, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$Np_{n,k} = (a + k)p_{n-1,k} + (b + 1 - k)p_{n-1,k-1}. \quad (\mathcal{A})$$

8. **Calcul de l'espérance de X_n .**

- a) À l'aide de la formule (A), démontrer que pour $n \geq 1$:

$$N\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (b + k(N-1)) p_{n-1,k}$$

puis justifier que

$$\mathbf{E}(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

- b) À l'aide de la formule ci-dessus, écrire un script Python affichant le calcul de $\mathbf{E}(X_{1453})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.
c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\mathbf{E}(X_n) = b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

- d) On suppose dans cette question que b est fixe et N varie. Montrer que la suite $(\mathbf{E}(X_N))_{N \geq b}$ admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, que l'on déterminera en fonction de b .

9. **Calcul de q_n**

- a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b - k) p_{n,k}.$$

- b) Pour tout entier naturel n , exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathbf{E}(X_n)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N . Préciser, pour b fixé, la limite de q_N lorsque $N \rightarrow +\infty$.

10. **Calcul de la variance de X_n** (Question sensiblement plus technique et calculatoire)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \mathbf{E}(X_n(X_n - 1)).$$

- a) À l'aide de la formule (A), montrer que l'on a :

$$Nu_n = \sum_{k=1}^{n-1} (k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k) p_{n-1,k}.$$

- b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

- c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].$$

- d) Donner la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Solution de l'exercice 2

- Il est manifeste que Y prend des valeurs entières, qu'il faut au moins un tirage pour obtenir une boule blanche, et que dans le pire des cas on tirera b boules noires avant de forcément tirer une boule blanche. Donc $Y(\Omega) \subset \llbracket 1, b+1 \rrbracket$. L'inclusion réciproque est tout aussi évidente : pour tout $k \in \llbracket 1, b+1 \rrbracket$, si ω_k est l'issue correspondant à tirer $k-1$ boules noires puis une boule blanche, alors $Y(\omega_k) = k$. On a bien :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, b+1 \rrbracket.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons N_k l'évènement « tirer une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage ».
 - Notons que : $[Y = 1] = \bar{N}_1$, et donc

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{a}{N}.$$

- Soit $k \in \llbracket 2, b+1 \rrbracket$. Observons que : $[Y = k] = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap \bar{N}_k$. D'après la **formule des probabilités composées**, on a :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(N_1) \mathbf{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-1} N_j}(\bar{N}_k).$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket$, $\mathbf{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{N_{i-1}}}(N_i) = \frac{b - (i-1)}{N}$, et $\mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-1} N_j}(\bar{N}_k) = \frac{a + k - 1}{N}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k) &= \frac{b}{N} \frac{b-1}{N} \dots \frac{b - (k-1-1)}{N} \frac{a + (k-1)}{N} \\ \mathbf{P}(Y = k) &= \frac{(a + k - 1)b!}{N^k(b - k + 1)!}. \end{aligned}$$

Notons que cette formule est toujours valable pour $k = 1$. Donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, b+1 \rrbracket, \mathbf{P}(Y = k) = \frac{(a + k - 1)b!}{N^k(b - k + 1)!}$$

- En particulier, pour $k = b+1$, on obtient :

$$\mathbf{P}(Y = b+1) = \frac{(a+b)b!}{N^{b+1}0!} = \frac{N \cdot b!}{N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 1, b \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
\frac{b!}{b - (k - 1)!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k} &= \frac{b!}{N^{k-1}(b - k)!} \left(\frac{1}{b - (k - 1)} - \frac{1}{N} \right) \\
&= \frac{b!}{N^{k-1}(b - k)!} \frac{N - b + k - 1}{(b - (k - 1))N} \\
&= \frac{b!}{N^k(b - (k - 1))!} (a + k - 1) \\
\frac{b!}{b - (k - 1)!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k} &= \mathbf{P}(Y = k).
\end{aligned}$$

4. Soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) &= \sum_{k=1}^M ka_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k && \text{linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^M (k - 1 + 1)a_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k \\
&= \sum_{k=1}^M (k - 1)a_{k-1} + \sum_{k=1}^M a_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k && \text{linéarité} \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} ja_j - \sum_{k=1}^M ka_k + \sum_{j=0}^{M-1} a_j && j = k - 1 \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} a_j - Ma_M && \text{télescope} \\
\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) &= \sum_{k=0}^{M-1} a_k - Ma_M.
\end{aligned}$$

5. Par définition, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k\mathbf{P}(Y = k).$$

En utilisant la question 3, cela donne :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^b k \left(\frac{b!}{b - (k - 1)!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k} \right) + (b + 1) \frac{b!}{N^b}.$$

On applique maintenant la question 4, avec $M = b$, et $a_k = \frac{b!}{(b - k)!N^k}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b - k)!N^k} - b \frac{b!}{N^b} + (b + 1) \frac{b!}{N^b} \\
&= \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b - k)!N^k} + \frac{b!}{N^b} \\
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b - k)!N^k}.
\end{aligned}$$

Partie II

Notons que nous avons déjà introduit la notation N_n (de la nécessité de lire l'énoncé avant, afin que nos notations soient cohérentes tout au long des réponses). Par ailleurs, on observe que :

$$\forall n, k, p_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k).$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $[X_n = 0]$ correspond à l'issue pour laquelle on n'obtient que des boules blanches, *i.e.*

$$[X_n = 0] = \bar{N}_1 \cap \dots \cap \bar{N}_n.$$

Par la **formule des probabilités composées**, on obtient donc, l'urne étant inchangée si on ne tire que des boules blanches :

$$p_{n,0} = \mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{a}{N}\right)^n.$$

Notons que $p_{0,0} = 1$, la formule ci-dessus est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : bien que l'urne soit inchangée en ne tirant que des boules blanches, il n'y a pas d'indépendance entre les tirages ($\bar{N}_1$ et $\bar{N}_2$ ne sont pas indépendants). On est donc obligé d'utiliser la formule des probabilités composées.

Si $n > b$, comme le fait remarquer l'énoncé, $p_{n,n} = 0$.

Si $n \leq b$, alors $[X_n = n]$ est l'évènement « on n'obtient que des boules noires aux n premiers tirages », *i.e.* :

$$[X_n = n] = N_1 \cap \dots \cap N_n.$$

Là encore, on utilise la formule des probabilités composées, qui donne :

$$\begin{aligned} p_{n,n} &= \mathbf{P}(X_n = n) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n N_k\right) \\ &= \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2) \cdots \mathbf{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} N_k}(N_n) \quad \text{probabilités composées} \\ &= \frac{b}{N} \frac{b-1}{N} \cdots \frac{b-(n-1)}{N} \\ &= \frac{b!}{N^n(b-n)!}. \end{aligned}$$

7. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. La famille $(N_n, \bar{N}_n)$ forme un système complet d'évènements. D'après la **formule des probabilités totales**, on a :

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}([X_n = k] \cap N_n) + \mathbf{P}([X_n = k] \cap \bar{N}_n).$$

Or : si N_n est réalisé, l'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si $[X_{n-1} = k-1]$ est réalisé. Donc :

$$[X_n = k] \cap N_n = [X_{n-1} = k-1] \cap N_n.$$

De même : $[X_n = k] \cap \bar{N}_n = [X_{n-1} = k] \cap \bar{N}_n$. Supposons que $n > k$. Alors on peut conditionner par rapport à $X_n = k$ et $X_n = k - 1$, et :

$$\begin{aligned} p_{n,k} \mathbf{P}([X_n = k - 1] \cap N_n) + \mathbf{P}([X_n = k] \cap \bar{N}_n) \\ = \mathbf{P}_{([X_n = k - 1])}(N_n) \mathbf{P}([X_n = k - 1]) + \mathbf{P}_{([X_n = k])}(\bar{N}_n) \mathbf{P}([X_n = k]) \\ = \frac{b - (k - 1)}{N} p_{n-1,k-1} + \frac{a + k}{N} p_{n-1,k}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, k < n, N p_{n,k} = (b - k + 1) p_{n-1,k-1} + (a + k) p_{n-1,k}.$$

Notons que, si $k > n$, alors toutes les probabilités sont nulles et le résultat est toujours vrai. Enfin, si $k = n$, la formule est toujours vérifiée (voir question 6).

8. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} N \mathbf{E}(X_n) &= N \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k N p_{n,k} && \text{premier terme nul} \\ &= \sum_{k=1}^n k ((a + k) p_{n-1,k} + (b + 1 - k) p_{n-1,k-1}) && \text{question 7} \\ &= \sum_{k=1}^n k (a + k) p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k (b + 1 - k) p_{n-1,k-1} && \text{linéarité} \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} k (a + k) p_{n-1,k} + \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) (b - j) p_{n-1,j} && \text{termes nuls et } j = k - 1 \\ N \mathbf{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (b + k(N - 1)) p_{n-1,k} && \text{télescopage, termes nuls} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n) &= \frac{N - 1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1,k} + \frac{b}{N} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} && \text{linéarité} \\ &= \frac{N - 1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} k \mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{b}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\ &= \frac{N - 1}{N} \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{b}{N} 1 && X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \\ \mathbf{E}(X_n) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{b}{N}. \end{aligned}$$

b) Puisque X_0 est certaine égale à 0, $\mathbf{E}(X_0) = 0$. Donc, si $b = 10$ et $N = 100$, on a : $\mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{10}$. On exploite la relation ci-dessus pour calculer à l'aide d'une boucle inconditionnelle les termes successifs de $\mathbf{E}(X_n)$, pour $n \in \llbracket 1, 1453 \rrbracket$.

```

N=100
b=10
E=1/10      # variable E initialisée à E(X_1)
for k in range(2,1454):    # k parcourt [|2,1453|]
    E=(1-1/N)*E+b/N      # a chaque sortie de boucle, E contient E(X_k)
print(E)

```

- c) Une preuve par récurrence fonctionnerait très bien. Cependant, on peut reconnaître que la relation trouvée en 8-a) montre que la suite $(\mathbf{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique**. On applique la méthode : recherche de point fixe. Résolvons l'équation

$$\ell = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \ell + \frac{b}{N},$$

dont la solution est $\ell = b$.

Suite auxiliaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \mathbf{E}(X_n) - b$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}) - b \\
 &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(X_n) + \frac{b}{N} - b && \text{question 8-a} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) (\mathbf{E}(X_n) - b) \\
 v_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) v_n,
 \end{aligned}$$

la suite (v_n) est bien géométrique, de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = -b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n,$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{E}(X_n) = b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

- d) Pour tout $N \geq b$, on pose $u_N = \mathbf{E}(X_N)$. On a alors :

$$\forall N \geq b, u_N = b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N\right) = b \left(1 - e^{N \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)}\right).$$

Rappelons (c'est une limite usuelle, qui s'obtient soit par encadrement, soit en reconnaissant un taux d'accroissement) que :

$$N \ln \left(1 - \frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1,$$

et donc, par composition :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_N) = \frac{b(e-1)}{e}.$$

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons que $q_{n+1} = \mathbf{P}(N_{n+1})$. Par ailleurs, $X_n(\Omega) = \llbracket 0, \min(n, b) \rrbracket$. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n , on obtient :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\min(n,b)} \mathbf{P}_{([X_n=k])}(N_{n+1}) \mathbf{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(n,b)} \frac{b-k}{N} p_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{b-k}{N} p_{n,k} \quad \text{termes nuls} \end{aligned}$$

car, si l'on a obtenu k boules noires lors des n premiers tirages, il reste $b-k$ boules noires dans l'urne au $n+1^{\text{ème}}$ tirage. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k)p_{n,k}.$$

- b) On en déduit (définition de l'espérance et système complet d'événements associé à X_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \frac{1}{N}(b - \mathbf{E}(X_n)).$$

Il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

De la même manière qu'en 8-d), on obtient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} q_N = 0.$$

10. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \mathbf{E}(X_n(X_n - 1))$. Alors, par formule de transfert, puis en utilisant (A), on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} Nu_n &= N \sum_{k=0}^n k(k-1)p_{n,k} \quad \text{formule de transfert} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1)((a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}) \quad \text{d'après (A)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=2}^n k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1} \quad \text{linéarité, termes nuls} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(b-k)p_{n-1,k} \quad j = k-1, \text{ puis } k = j \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1,k} (k(k-1)(a+k) + k(k+1)(b-k)) \quad \text{linéarité} \\ Nu_n &= \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1,k} (k(k-1)(a+b-2) + 2k(b-1)) \quad \text{calcul.} \end{aligned}$$

b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a+b-2}{N} \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)p_{n-1,k} + \frac{2(b-1)}{N} \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1,k} k p_{n-1,k} \\ &= \frac{N-2}{N} \mathbf{E}(X_{n-1}(X_{n-1}-1)) + \frac{2(b-1)}{N} \mathbf{E}(X_{n-1}) \end{aligned} \quad \text{formule de transfert}$$

En combinant avec l'expression trouvée en 9-c) pour $\mathbf{E}(X_{n-1})$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

- c) Par récurrence, ça se passe très bien (mais c'est un peu calculatoire). On n'oublie pas d'initialiser à $n = 0$.
d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que, d'après la formule de König-Huygens :

$$V(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) - \mathbf{E}(X_n)^2.$$

Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, $u_n = \mathbf{E}(X_n)^2 - \mathbf{E}(X_n)$, donc :

$$V(X_n) = u_n + \mathbf{E}(X_n) - \mathbf{E}(X_n)^2.$$

On connaît chacune de ces expressions, on remplace. De plus, $V(X_0) = 0$ (loi certaine). Enfin, on obtient aisément que, à N, b fixés, $V(X_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.