

CONCOURS BLANC N°1 MATHS II

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements auront une part importante dans la notation de la copie. Changez de page pour chaque exercice ou problème. Pensez à inscrire le numéro de la question et de l'exercice. Numérotez vos pages. Encadrez les résultats finaux. Utilisez une règle.

Ce sujet comprend deux exercices indépendants, et cinq pages. Vérifiez avant de composer que vous avez l'intégralité du sujet.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie, et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Dans tout le sujet, on pourra utiliser le résultats suivant (en les citant, et si besoin en vérifiant les hypothèses).

Proposition (Linéarité de l'espérance). *Soient X, Y deux variables aléatoires finies définies sur un même espace probabilisé, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y).$$

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10€ pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10€ pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'évènement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X , puis vérifier que $\mathbf{P}(A) = \frac{13}{27}$.
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie on revient au cas général où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur n et p pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

4. a) On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.
b) Démontrer que : $\mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{P}(A) - 1$.
5. a) Donner la loi de X .
b) En déduire qu'on a également :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que $\mathbf{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.

6. Exprimer alors la valeur de $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n et p .
7. Démontrer que :

$$\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair} \gg \right].$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbf{E}(G) \leq 0$).

8. Exprimer G en fonction de X et Y . En déduire que :

$$\mathbf{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbf{P}(X = k).$$

9. Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

10. Montrer que : $\mathbf{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

11. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \\ \mathbf{E}(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

12. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Exercice 2

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, "au hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Partie I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs possibles pour la variable Y .
2. a) Déterminer $\mathbf{P}(Y = 1)$.
b) Pour tout entier k compris entre 1 et $b + 1$, calculer la valeur de $\mathbf{P}(Y = k)$.
3. Vérifier que

$$\mathbf{P}(Y = b + 1) = \frac{b!}{N^b},$$

et que pour tout k compris entre 1 et b , la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{b!}{(b - (k - 1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k}.$$

4. Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

5. En déduire que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b - k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geq 1$, q_n la probabilité de l'évènement, noté N_n : "la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est noire"
- pour tout entier $n \geq 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues lors des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$.
- Pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'évènement : "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires."

On remarquera que $p_{0,0} = 1$, et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$ (on différenciera suivant $n > b$ et $n \leq b$).
7. Démontrer la formule suivante, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$Np_{n,k} = (a + k)p_{n-1,k} + (b + 1 - k)p_{n-1,k-1}. \quad (\mathcal{A})$$

8. **Calcul de l'espérance de X_n .**

a) À l'aide de la formule (A), démontrer que pour $n \geq 1$:

$$N\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (b + k(N-1)) p_{n-1,k}$$

puis justifier que

$$\mathbf{E}(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

b) À l'aide de la formule ci-dessus, écrire un script Python affichant le calcul de $\mathbf{E}(X_{1453})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\mathbf{E}(X_n) = b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

d) On suppose dans cette question que b est fixe et N varie. Montrer que la suite $(\mathbf{E}(X_N))_{N \geq b}$ admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, que l'on déterminera en fonction de b .

9. **Calcul de q_n**

a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b - k) p_{n,k}.$$

b) Pour tout entier naturel n , exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathbf{E}(X_n)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N . Préciser, pour b fixé, la limite de q_N lorsque $N \rightarrow +\infty$.

10. **Calcul de la variance de X_n** (Question sensiblement plus technique et calculatoire)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \mathbf{E}(X_n(X_n - 1)).$$

a) À l'aide de la formule (A), montrer que l'on a :

$$Nu_n = \sum_{k=1}^{n-1} (k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k) p_{n-1,k}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

d) Donner la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.