

CB11 ECG1
mardi 9 janvier 2024
3,5 heures

- *La présentation de la copie, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans une part importante de l'évaluation de la copie.*
- *Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*
- *Traitez chacun des exercices sur des copies indépendantes.*
- *N'oubliez pas de bien numéroter les copies, de mettre votre nom sur chacune d'elle, et de respecter l'ordre des questions.*

Problème 1

Partie 1 : La règle de l'Hospital

Question de cours :

Enoncer le théorème de Rolle et le démontrer.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit g et h deux fonctions continues sur le segment $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$, et telles que $\forall x \in]a; b[, h'(x) \neq 0$.

1. a. Montrer que $h(b) \neq h(a)$
 b. On pose $\lambda = \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)}$ et on considère la fonction $\phi : x \mapsto g(x) + \lambda h(x)$.
 i. Montrer que ϕ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
 ii. En déduire qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$.
2. On suppose de plus que $g(a) = h(a) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = l$, avec l réel.

Déduire de la première question que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = l$

Ce dernier résultat s'appelle "la règle de l'Hospital"

Partie 2 : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. a. Etudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction $\phi : t \mapsto t - (1+t) \ln(1+t)$
 En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.
 b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .
 c. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 d. Montrer que f s'annule en un unique point : on appelle ce point α .
 Vérifier que $1 < \alpha < 2$.
4. En utilisant la règle de l'Hospital, (après avoir vérifié les hypothèses requises), montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.
5. h désignant la bijection réciproque de f , montrer que h est dérivable sur J et vérifier que :

$$h'(0) = \frac{\alpha(1+2\alpha)}{1-2\alpha}$$
6. Déterminer $h'(1)$.

Partie 3 : Etude d'une suite qui converge vers α

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$$

On introduit par ailleurs une fonction g définie sur $[0; +\infty[$, par $g(x) = \ln(1 + 2x)$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donner les valeurs possibles de sa limite.
3.
 - a. On suppose que $u_0 \in]0; \alpha]$.
Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; \alpha]$, puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Quelle est alors sa limite ?
 - b. Montrer de manière analogue que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α si on suppose que $u_0 \in]\alpha; +\infty[$.
4. Etude d'un cas particulier
Dans cette question, on suppose que $u_0 = 1$
 - a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; \alpha]$.
 - b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$$
 puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
 - c. A partir de quel rang n_0 , est-on sûr que u_{n_0} représente une valeur approchée α à 10^{-4} près ?

Exercice 2 :

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

(on dit aussi que f est une fonction k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$).

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

1. Étude d'exemples
 - a. Montrer que toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
 - b. Montrer que toute fonction affine est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
 - c. Montrer que $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$ est élément de $\mathcal{L}$.
 - d. Montrer que la fonction $\tilde{h} : t \mapsto t^2$ n'est pas élément de $\mathcal{L}$.
2. Fonctions lipschitziennes et continuité.
 - a. Montrer que toute fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ y est continue.
 - b. Étudier la réciproque.
3. Fonctions lipschitziennes et opérations
 - a. Montrer que la somme de deux éléments de $\mathcal{L}$ est élément de $\mathcal{L}$.
 - b. Qu'en est-il du produit ?
 - c. Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{L}$ est élément de $\mathcal{L}$.
4. Fonctions lipschitziennes et dérivabilité
 - a. Soit f est un élément de $\mathcal{L}$, f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
 - b. Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, f est-elle un élément de $\mathcal{L}$?
 - c. Soient maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, on dit qu'une fonction f définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne sur $[a, b]$ s'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^1[a, b]$, f est-elle lipschitzienne sur $[a, b]$? Si oui, donner une valeur pour k .