

Des Questions Indépendantes

1) On admet que pour tout réel $x > 0$, on ait : $-1 \leq \frac{e^{-x}-1}{x} \leq -e^{-x}$.

a) On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-e^{-x}) = -1$, par composition et produit. Le théorème des « gendarmes » nous permet de

tirer la conséquence ; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} \right) = -1$.

conclure que

b) Soit $x > 0$, si on développe $(e^{-x} - 1)e^x$, on obtient $1 - e^x$, d'où $\frac{xe^x}{1-e^x} = \frac{xe^x}{(e^{-x}-1)e^x} = \frac{x}{e^{-x}-1}$. (en simplifiant par e^x)

c) On remarque que le réel $\frac{xe^x}{1-e^x}$ est l'inverse de $\frac{e^{-x}-1}{x}$ (voir b). Par limite de quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{xe^x}{1-e^x} \right) = -1$

2) IL suffit de développer $(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})$, identité remarquable, pour obtenir :

$$x^2 - (x^2 + 1) = -1. \text{ On écrit alors } x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

je préférerais une justification de la limite de la composée plutôt que cette phrase

On justifie facilement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$, par composition et somme de limite. Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0, \text{ par quotient et produit. D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = 0.$$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

$$\text{Pour tout } x \text{ réel non nul, } f(x) = \frac{x}{e^x - 2x} = \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 2} \text{ (On simplifie par } x \text{)}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty$, par croissance comparée et somme. Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, par quotient de limite.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 2 = -2$, par quotient et somme de limite. Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$, par inverse de limite.
- les asymptotes devraient être données après chaque limite

EXERCICE 1

Partie A : Questions de cours

1. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentant la fonction exponentielle dans un repère du plan, au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$ **On ne justifie pas cela, ni la convexité de exponentielle??**
2. On sait que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, ainsi sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes en particulier celle en 0, d'équation $y = x + 1$. D'où, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Partie B

1. Dans toute la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{x+1}{e^x}$$

- a) On a $\frac{x+1}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0$, par croissance comparée et inverse de limite.
D'où, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ par produit et somme de limite. La courbe de f possède donc une asymptote d'équation $y = 3$.
- b) f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient et somme de fonctions dérivables.
Et, $\forall x \geq 0$, $f'(x) = -\frac{1 \times e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = -\frac{e^x - xe^x - e^x}{e^{2x}} = -\frac{-xe^x}{e^{2x}} = \frac{x}{e^x}$, donc $f'(x) \geq 0$. Ainsi f **es** strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- c)

x	0	$+\infty$
Variations de f	2	0

la flèche est à l'envers et la limite est 3

2. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$, par $g(x) = f(x) - x$.
 - a) g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.
Et, $\forall x \geq 0$, $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{x}{e^x} - 1 = \frac{x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}$. Soit $g'(x) = \frac{x-e^x}{e^x}$.
 - b) D'après **A2)**, $e^x \geq x + 1$, donc $e^x > x$, ainsi $x - e^x < 0$, et par conséquent, $\frac{x-e^x}{e^x} < 0$.
 - c) L'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) - x = 0$, soit $g(x) = 0$.
 - Sur $[2 ; 3]$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante car $g'(x) < 0$.
 - En plus, $g(2) = 1 - \frac{3}{e^2} \approx 0,6 > 0$ et $g(3) = -\frac{4}{e^3} < 0$. D'où $g(3) < 0 < g(2)$.

Par le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$, possède une unique solution α dans $[2 ; 3]$. Soit $f(\alpha) = \alpha$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $2,76 < \alpha < 2,77$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n+1}{e^{u_n}}$:
Montrer, par récurrence sur n , que la suite (u_n) est croissante et majorée par α .

Pour tout entier naturel n , $P(n)$ désigne la propriété : « $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ »

- Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 3 - \frac{1+1}{e} = 3 - 2/e \approx 2,26$, ainsi $u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposant, pour un certain entier naturel n , que $P(n)$ est vraie,

supposons

Alors, $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$, car f est croissante sur $[2 ; \alpha]$.

Par hypothèse de récurrence

De plus

ET comme $f(u_n) = u_{n+1}$; $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ et $f(\alpha) = \alpha$, alors, $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$. P(n+1) est donc vraie.

- On conclut, par le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

d) La suite (u_n) est convergente vers une limite L , car croissante et majorée par α , par le théorème de la convergence monotone.

e) On a d'une part $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = L$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$. Et d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)$, car f est continue sur $[2; 3]$. Par unicité de la limite d'une suite on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(u_n)$. Soit $f(L) = L$.

La limite de la suite (u_n) est le nombre α (car $f(\alpha) = \alpha$) dont un encadrement a été donné ci-dessus.

EXERCICE 2

Un cube ABCDEFGH d'arrête 8 et traversé par 2 aiguilles suivant les droites (II') et (JJ'). Elles pénètrent toutes les deux par la face supérieure EFGH du cube, la première au point I tel que $\vec{EI} = \frac{1}{8}(\vec{EF} + \vec{EH})$, la seconde au point J tels que $\vec{EJ} = \frac{1}{2}(\vec{EF} + \vec{EH})$.

Elles ressortent par des faces latérales. La première au point I' de la face BCGF tels que :

$\vec{BI'} = \frac{3}{8}\vec{BC} + \frac{1}{8}\vec{BF}$. La seconde au point J' de la face ABFE tels que : $\vec{AJ'} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AE}$.

On souhaite répondre à la question : Les deux aiguilles se touchent-elles ?

1) Justifier, à l'aide de la relation de Chasles, les égalités vectorielles suivantes :

a) $\vec{IJ} = \vec{EJ} - \vec{EI} = \frac{1}{2}(\vec{EF} + \vec{EH}) - \frac{1}{8}(\vec{EF} + \vec{EH}) = \frac{3}{8}\vec{EF} + \frac{3}{8}\vec{EH}$.

b) Par la relation de Chasles, on obtient : $\vec{II'} = \vec{IE} + \vec{EB} + \vec{BI'} = -\frac{1}{8}(\vec{EF} + \vec{EH}) + \vec{EA} + \vec{EF} + \frac{3}{8}\vec{EH} - \frac{1}{8}\vec{EA}$

Car $\vec{BC} = \vec{EH}$ et $\vec{BF} = -\vec{EA}$. Ainsi $\vec{II'} = \frac{7}{8}\vec{EA} + \frac{7}{8}\vec{EF} + \frac{1}{4}\vec{EH}$.

c) Par la relation de Chasles, on obtient : $\vec{IJ'} = \vec{IE} + \vec{EA} + \vec{AJ'} = \vec{EI} = -\frac{1}{8}(\vec{EF} + \vec{EH}) + \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{EF} - \frac{1}{8}\vec{EA}$.

Car $\vec{AB} = \vec{EF}$. Ainsi, $\vec{IJ'} = \frac{7}{8}\vec{EA} + \frac{3}{8}\vec{EF} - \frac{1}{8}\vec{EH}$.

2) Supposons qu'il existe un couple de réels $(x; y)$ non nul tels que $\vec{IJ} = x\vec{II'} + y\vec{IJ'}$.

$$\vec{IJ} = x\vec{II'} + y\vec{IJ'} \Leftrightarrow \frac{3}{8}\vec{EF} + \frac{3}{8}\vec{EH} = x\left(\frac{7}{8}\vec{EA} + \frac{7}{8}\vec{EF} + \frac{1}{4}\vec{EH}\right) + y\left(\frac{7}{8}\vec{EA} + \frac{3}{8}\vec{EF} - \frac{1}{8}\vec{EH}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}\vec{EF} + \frac{3}{8}\vec{EH} = \left(\frac{7}{8}x + \frac{7}{8}y\right)\vec{EA} + \left(\frac{7}{8}x + \frac{3}{8}y\right)\vec{EF} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right)\vec{EH}$$

Les vecteurs $\vec{EA}$, $\vec{EF}$ et $\vec{EH}$ sont non coplanaires, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}y = 0 \\ \frac{7}{8}x + \frac{3}{8}y = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 & L_1 \\ 7x + 3y = 3 & L_2 \\ 2x - y = 3 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 & L_1 + L_3 \\ 7x + 3y = 3 & L_2 \\ y = 2x - 3 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 7 \times 1 + 3 \times (-1) = 4 \neq 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

La contradiction est que le couple $(1; -1)$ ne vérifie pas la deuxième équation.

3) D'après la question (2) les trois vecteurs $\vec{IJ}$; $\vec{II'}$ et $\vec{IJ'}$ ne sont pas coplanaires et par conséquent les quatre points I, I', J et J' ne le sont pas aussi. Les aiguilles (II') et (JJ') ne peuvent jamais se toucher.