

Des Questions Indépendantes

1) On admet que pour tout réel $x > 0$, on ait : $-1 \leq \frac{e^{-x}-1}{x} \leq -e^{-x}$.

a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} \right)$

b) Justifier que pour tout réel $x > 0$, $\frac{xe^x}{1-e^x} = \frac{x}{e^{-x}-1}$. (Remarquez que $1 - e^x = (e^{-x} - 1)e^x$).

c) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{xe^x}{1-e^x} \right)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$ (Remarquez que, pour tout réel x , $(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -1$)

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

Justifier l'affirmation suivante :

« Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes d'équations $y = 0$ et $y = -\frac{1}{2}$ » (Remarquez que $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$ pour tout réel $x \neq 0$)

EXERCICE 1Partie A : Questions de cours

- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant la fonction exponentielle dans un repère du plan, au point d'abscisse 0.
- Justifier sans calculs que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Partie B

- Dans toute la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{x+1}{e^x}$$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

- On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$, par $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{x-e^x}{e^x}$

b) Justifier que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x-e^x}{e^x} < 0$. Utiliser la partie A.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n+1}{e^{u_n}}$:

a) Montrer, par récurrence sur n , que la suite (u_n) est croissante et majorée par α .

b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

Un cube ABCDEFGH d'arrête 8 et traversé par 2 aiguilles suivant les droites (II') et (JJ'). Elles pénètrent toutes les deux par la face supérieure EFGH du cube, la première au point I tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH})$, la seconde au point J tels que $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH})$.

Elles ressortent par des faces latérales. La première au point I' de la face BCGF tels que : $\overrightarrow{BI'} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{BF}$. La seconde au point J' de la face ABFE tels que : $\overrightarrow{AJ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

On souhaite répondre à la question : Les deux aiguilles se touchent-elles ?

1) Justifier, à l'aide de la relation de Chasles, les égalités vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{8}\overrightarrow{EF} + \frac{3}{8}\overrightarrow{EH}$

b) $\overrightarrow{II'} = \frac{7}{8}\overrightarrow{EA} + \frac{7}{8}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$

c) $\overrightarrow{IJ'} = \frac{7}{8}\overrightarrow{EA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{EF} - \frac{1}{8}\overrightarrow{EH}$

2) Montrer qu'il n'existe aucun couple de réels $(x; y)$ vérifiant l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{II'} + y\overrightarrow{IJ'}$.

Vous supposez qu'il existe ce couple, et vous tombez sur une contradiction.

3) Répondre à la question posée ci-dessus.

