

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales classées corrigées

Expériences aléatoires – Probabilités

SUJET

Exercice 2

Au Canada, une procédure de test aléatoire est réalisée en plus de l'obligation de fournir un certificat de vaccination pour les voyageurs internationaux. La probabilité d'être testé dépend uniquement du pays de provenance selon une classification en 3 catégories liées à l'état de l'épidémie : 0,8 pour un pays classé rouge, 0,5 pour un pays classé orange et 0,2 pour un pays classé vert. Les tirages au sort des patients testés sont indépendants.

Question n°7 Au même moment atterrissent un Airbus de 500 passagers en provenance de Paris (pays orange) et un Boeing de 300 passagers en provenance de Sidney (pays vert). Les autorités imposent une quarantaine aux voyageurs qui sont testés et qui ont un résultat positif. Quand ils sont testés, on sait que 30% des voyageurs Français et 10% des voyageurs Australiens ont un résultat positif. Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte?

Un passager non mis en quarantaine a une probabilité de venir d'Australie de (à 1% près) :

- A. 11%
- B. 21%
- C. 31%
- D. 41%
- E. 51%

Exercice 1

Le responsable de l'hôpital de Dache décide de mettre en place un système d'évaluation de la satisfaction des patients hospitalisés. Cet hôpital ne comprend que 2 services (Service A et Service B). A la sortie de l'hôpital, on demande à chaque patient de donner une note de satisfaction à propos de leur hospitalisation. Cette note est mesurée sur l'échelle des entiers compris entre 0 et 10 (0 correspondant à une absence totale de satisfaction et 10 à une satisfaction maximale).

Soit X_A , la variable aléatoire correspondant à la note donnée par un patient à sa sortie du service A. La distribution de X_A est symétrique et vérifie $P(X_A = 0) = 0,05$, $P(X_A = 1) = 0,05$, $P(X_A = 2) = 0,05$, $P(X_A = 3) = 0,1$, $P(X_A = 4) = 0,1$, $P(X_A = 5) = 0,3$. La variance de X_A vaut 6.

Question n°3 Pour améliorer les notations dans le service B, la personne en charge de recueillir les évaluations coche, sans demander leur avis aux patients et de manière équiprobable, 9 ou 10. En considérant que la proportion de patients sortant du service A est la même que la proportion de patients sortant du service B, que peut on dire de la probabilité q qu'un patient ayant noté 9 provienne du service A?

Cochez LA réponse exacte.

- A. $q < 0,1$
- B. $q \in [0,1; 0,3]$
- C. $q \in [0,3; 0,6]$
- D. $q \in [0,6; 0,9]$
- E. $q > 0,9$

Exercice 1

La société BIGRADATA® décide de commercialiser un logiciel d'aide à la lecture de radios thoraciques aux urgences pour diminuer la charge de travail des médecins pour le diagnostic de pneumopathie. Ce logiciel, développé grâce à des outils d'intelligence artificielle, classe les radios thoraciques en trois groupes: Absence de pneumopathie (A), Doute sur une pneumopathie (D), Certitude quant à la présence d'une pneumopathie (C).

Le fabricant indique que la probabilité que le logiciel classe c un patient effectivement **atteint** d'une pneumopathie est de 0,80 alors que la probabilité que le logiciel classe c un patient qui n'est **pas atteint** d'une pneumopathie est de 0,02.

Question n°1 On considère l'expérience aléatoire consistant à réaliser une radio thoracique à un patient venant aux urgences et à noter ce qu'indique le logiciel. On considère que tous les événements décrits précédemment ont une probabilité non nulle de se produire. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. Le résultat de cette expérience aléatoire est une grandeur qualitative catégorielle (non ordonnée)
- B. $E = \{A, D, C\}$ représente l'ensemble des événements élémentaires de cette expérience aléatoire
- C. $P(A|D) = P(A)$
- D. $P(A) + P(C) = 1 - P(D)$
- E. $P(\bar{A}) = P(C) + P(D)$

On considère pour la suite de l'exercice que la prévalence des pneumopathies parmi les patients consultants aux urgences de l'hôpital de Champagnac est de 0,10.

Question n°3 Si un patient est classé c, quelle est la probabilité qu'il présente effectivement une pneumopathie? Cochez **LA** réponse exacte.

- A. Cette probabilité est strictement supérieure à 0,80
- B. Cette probabilité est exactement égale à 0,80
- C. Cette probabilité est égale à 0,50 (à 0,05 près)
- D. Cette probabilité est égale à 0,30 (à 0,05 près)
- E. Cette probabilité est strictement inférieure à 0,20

2018

Aujourd'hui seuls trois vaccins infantiles sont obligatoires en France : contre la diphtérie, le tétanos et la poliomyélite (DTP). Huit autres sont seulement recommandés : contre la coqueluche, la rougeole, les oreillons, la rubéole, l'hépatite B, l'haemophilus influenzae, le pneumocoque et le méningocoque C.

Question n°1

Actuellement en France, seuls 85% des enfants reçoivent les 3 vaccins obligatoires. La proportion de non vaccinés est en fait de 10% chez les enfants citadins. Que pouvez-vous affirmer quant à la décision de non vaccination ?

Cochez la ou les bonnes réponses.

- A. Elle est liée au lieu de vie.
- B. Elle est indépendante de l'âge des parents.
- C. Sa prévalence est de 15% en France.
- D. Elle est, en dehors des villes, supérieure à 15%.
- E. Il manque des informations sur chaque vaccin pour répondre.

2016

Les infections à méningocoques sont des infections graves, avec une mortalité importante et survenant de manière isolée ou par épidémie.

En France, les infections à méningocoques font partie des maladies à déclaration obligatoire, c'est à dire que tout médecin diagnostiquant une de ces maladies doit déclarer le cas à Agence Régionale de Santé (ARS). Par ailleurs, en cas de diagnostic d'infection à méningocoques les prélèvements bactériologiques sont normalement envoyés au Centre National de Référence (CNR) des Méningocoques.

Le médecin souhaite évaluer le nombre d'infections à méningocoques en 2014 en France. Il a à sa disposition les deux sources de recensement pour 2014 :

- une liste de 600 malades provenant des Agences Régionales de Santé
- une liste de 500 malades provenant du Centre National de Référence

400 malades sont présents sur les deux listes et un nombre inconnu de patients ne sont présents dans aucune des deux listes.

Question n°6 Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir de manière équiprobable un individu parmi les N personnes ayant présenté une infection à méningocoques en 2014 en France et à vérifier son appartenance aux listes. Soit L_{ARS} l'événement *appartenir à la liste de l'ARS* et L_{CNR} l'événement *appartenir à la liste CNR*. On considère que les listes ont été constituées de manière **indépendante**. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. $P(L_{ARS}) = P(L_{CNR}|L_{ARS})$
- B. $P(L_{ARS}) = 600/N$
- C. $P(L_{ARS} \cap L_{CNR}) = P(L_{ARS}) + P(L_{CNR})$
- D. $P(L_{ARS} \cap L_{CNR}) = P(L_{ARS}) \times P(L_{CNR})$
- E. $P(\overline{L_{ARS}} \cup \overline{L_{CNR}}) = 1 - P(L_{ARS}) - P(L_{CNR}) + P(L_{ARS} \cap L_{CNR})$

Question n°7 On rappelle que l'on fait l'hypothèse que les listes ont été constituées de manière **indépendante**, le nombre *attendu* d'individus ayant présenté une infection à méningocoques et n'appartenant à aucune liste est égal à :

Cochez **LA** réponse exacte.

- A. 0
- B. 50
- C. 100
- D. 200
- E. 250

2015

Depuis 1997, pour limiter les dépenses de santé, la régulation du nombre de médecins formés chaque année en Belgique s'effectue via un *numerus clausus* fédéral strict limitant l'accès à la profession. Le gouvernement fédéral belge a ainsi fixé chaque année un nombre limité de numéros (dits INAMI) attribués au terme des sept années d'étude, numéro sans lequel un médecin ne peut exercer son métier, charge étant confiée aux gouvernements communautaires (néerlandophones en Flandre ou francophones en Wallonie) d'instaurer leur propre processus de sélection pour respecter la législation fédérale. Ces deux communautés belges ont opté pour deux stratégies différentes de régulation.

QCM 1 – Pendant près de 10 ans, l'ensemble des universités belges ont opté pour un examen d'entrée, avec une proportion de réussite en première année de 85%. En 2008, seule la Flandre (60% des étudiants) a conservé ce système, la Wallonie l'ayant abandonné sans autre régulation. De ce fait, à la fin de cette année universitaire, la communauté Wallonne vient d'annoncer que seuls 300 diplômés en médecine (soit 50% des diplômés attendus) auront accès à ce numéro INAMI. Quelle est la proportion (à 1% près) d'étudiants belges inscrits il y a 7 ans en première année et qui obtiendront un numéro INAMI cette année ? *On fera l'hypothèse que tout étudiant entré en seconde année parvient à valider ses années d'étude.* Cochez **LA** réponse exacte.

- A - 50%
- B - 60%
- C - 70%
- D - 80%
- E - 85%

2014

Une étude publiée récemment a été réalisée en Grande Bretagne pour apporter des informations épidémiologiques sur la violence. Chaque sujet a été interrogé sur son implication - dans les 5 années précédentes - dans des bagarres et/ou coups et blessures sur autrui. Toute réponse positive a classé le sujet comme "violent". Au total, le groupe interrogé comprenait 8000 individus (4000 hommes et 4000 femmes), dont 1000 (750 hommes et 250 femmes) ont rapporté un comportement violent. Deux tiers des sujets violents avaient des troubles de la personnalité contre un tiers des non violents. *Les données de l'étude ont été légèrement modifiées pour simplifier les calculs.*

QCM 7 Quelle est la proportion d'hommes parmi les non violents ? Cochez **LA** proposition exacte (à 0,05 près).

- A - 0,10
- B - 0,25
- C - 0,50
- D - 0,75
- E - Strictement supérieure à 0,80

Du fait de la longueur du questionnaire, certains sujets (en proportion 10%, et ce quelque soit leur sexe ou leur histoire de violence) ont omis de répondre à au moins une question (dont la réponse est alors "manquante").

QCM 11 Vous prenez un questionnaire au hasard dans la pile des questionnaires reçus. Il est incomplet. Quelle est la probabilité que ce questionnaire soit celui d'une femme violente ? Cochez LA proposition exacte (à 0,02 près).

- A - 0,03
- B - 0,06
- C - 0,30
- D - 0,50
- E - Il manque des informations pour répondre à cette question

2013

La plupart des fœtus adoptent en fin de grossesse une position « tête en bas » dans l'utérus, de façon à ce qu'ils puissent sortir de la filière pelvi-génitale de cette manière. Cependant, il arrive parfois que le fœtus ait la tête vers le haut, et que le fessier ou les pieds du bébé se présentent en premier. C'est ce que l'on appelle une présentation par le siège. Un médecin obstétricien décide de mener des études sur ce sujet. Dans la population générale, la prévalence des accouchements par le siège est de 1%

QCM 2 - Il lit dans le *British Medical Journal* l'existence d'une prédisposition familiale à la naissance par le siège : ainsi, les couples avec antécédent d'accouchement par le siège ont un risque doublé, par rapport au reste de la population, que leur premier enfant ne se positionne pas la tête en bas, avant l'accouchement. Soit x , la proportion de naissances par le siège d'enfants nés de couples sans antécédents, et $2x$ celle des couples avec antécédents d'accouchement par le siège. Cochez la ou les propositions exactes.

- A. Naitre par le siège est donc lié à une prédisposition familiale
- B. Naitre par le siège est donc indépendant d'une prédisposition familiale
- C. Si $x = 0,008$, la probabilité dans cette population qu'un couple ait des antécédents d'accouchements par le siège est de $1/4$
- D. Si $x = 0,008$, la probabilité dans cette population qu'un couple ait des antécédents d'accouchements par le siège est de $3/4$
- E. La prédisposition familiale et avoir un enfant se présentant par le siège sont donc incompatibles

Pour éviter les problèmes liés aux naissances par le siège, il décide de proposer un traitement aux femmes enceintes dont le fœtus est en siège à la 33ème semaine de gestation, afin qu'il se retourne avant l'accouchement. Il apprend que les médecins chinois chauffent une herbe à proximité de la peau du point d'acupuncture BL67 (« Zhiyin ») près du 5ème orteil, ce qui conduit au retournement spontané du fœtus en moins de deux semaines dans 75% des cas. Il décide d'évaluer ce traitement sur un échantillon de $n=27$ femmes.

QCM 4 - Il apprend que neuf femmes de l'échantillon ont préféré utiliser l'acupuncture, dont l'efficacité rapportée est de 50%. Il s'interroge sur le traitement qu'a choisi Mme X, dont le fœtus ne s'est pas retourné. Cochez LA proposition exacte (à 0,01 près).

- A. La probabilité pour qu'elle ait choisi le Zhiyin est de 0,25
- B. La probabilité pour qu'elle ait choisi l'acupuncture est de 0,25
- C. La probabilité pour qu'elle ait choisi le Zhiyin est de 0,50
- D. La probabilité pour qu'elle ait choisi l'acupuncture est de 0,66
- E. La probabilité pour qu'elle ait choisi le Zhiyin est de 0,66

2012

Le docteur N est nommé expert auprès du Tour de France pour organiser le contrôle de dopage des coureurs cyclistes. Il dispose des données enregistrées sur les 10 dernières années, et du tableau suivant sur ces coureurs (200 par an), selon le rang d'arrivée des coureurs. On classe les coureurs dans deux catégories : du 1^{er} au 10^{ème}, et du 11^{ème} au 200^{ème}.

Caractéristique	des 10 premiers	Des 11èmes-200èmes	Total
Age, moyenne $\pm$ écart-type	25 $\pm$ 4	26 $\pm$ 4	26 $\pm$ 4
Age < 18	4%	2,5%	2,6%
Durée moyenne sur la dernière étape des Champs Elysées (h)	1,5	2	2
Recherche de toxique dans les urines*	80%	20%	?
Proportion de détectés dopés sur les urines analysées	1%	1%	1%

* réalisée de façon aléatoire sur chaque catégorie de classement

QCM 1 - Que peut-il affirmer à partir de ces données ? Cochez la ou les propositions exactes. On supposera que l'âge des coureurs est distribué selon une loi Normale.

- A. 50% des coureurs ont bénéficié d'une recherche de toxique
- B. 23% des coureurs ont bénéficié d'une recherche de toxique
- C. La proportion de coureurs classés dans les 10 premiers qui a moins de 20 ans est de 20% (à 1% près)
- D. La proportion de coureurs classés dans les 10 premiers qui a moins de 20 ans est de 10% (à 1% près)
- E. Etre dans les 10 premiers est indépendant d'être détecté dopé sur les urines

QCM 3 - Quelle proportion de coureurs depuis 10 ans non classés dans les 10 premiers ont-ils eu une recherche de toxique tout en ayant moins de 18 ans. Cochez la ou les propositions exactes.

- A. Environ 5‰ (à 1‰ près)
- B. Environ 1% (à 2‰ près)
- C. Environ 2,5% (à 2‰ près)
- D. Environ 5% (à 5‰ près)
- E. Bien sûr, on suppose que la recherche de toxique était indépendante de l'âge chez ces coureurs

2011

Un médecin décide de réaliser l'expérience suivante dans son laboratoire. Il dispose d'une boîte en forme d'étoile à cinq branches au bout desquelles sont situées des niches numérotées de 1 à 5, dont seule l'une d'entre elles contient du fromage. Il place une souris au centre de cette boîte et note la niche où se réfugie la souris.

QCM 1 Parmi les réponses suivantes, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité pour que la souris trouve le fromage est de $1/5$
- b - La probabilité pour que la souris trouve le fromage est de $1/2$
- c - On peut modéliser l'expérience par une variable aléatoire de Bernoulli
- d - On peut modéliser l'expérience par une variable aléatoire discrète
- e - Toutes les propositions sont fausses

2010

L'échographie est utilisée pour détecter *in utero* les malformations fœtales. Elle permet également de prédire avant la naissance le sexe de l'enfant. Cependant, les erreurs commises par les échographistes ne sont pas symétriques : en effet, les filles sont toujours correctement identifiées, alors que les garçons sont identifiés comme des filles une fois sur 4. On considérera que 50% des naissances sont de sexe féminin.

QCM 1 On peut affirmer sans hésitation que ... Dire LA proposition vraie.

- a - L'erreur est indépendante du sexe.
- b - L'erreur et le sexe sont incompatibles.
- c - L'erreur n'est pas liée au sexe.
- d - L'erreur n'est pas indépendante du sexe.
- e - Il faut faire un test pour conclure.

QCM 2 Quelle est la probabilité qu'un échographiste commette une erreur? Dire LA proposition vraie.

- a - 0,05
- b - 0,125
- c - 0,20
- d - 0,25
- e - 0,50

QCM 3 Une femme enceinte sort de la salle d'échographie. Elle déclare qu'elle attend une fille. On considérera que la performance de l'échographiste dans la détection du sexe féminin peut se mesurer en termes de sensibilité (Se) et de spécificité (Spe), par analogie avec une performance diagnostique, avec $Se = P(S | M)$ et $Spe = P(\bar{S} | \bar{M})$ où S est la conclusion de l'échographiste et M le sexe vrai de l'enfant. Dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité pour qu'il s'agisse d'une fille est de 1 car l'échographiste ne commet pas d'erreur chez les filles
- b - La probabilité pour qu'il s'agisse d'une fille est de 0,75 notamment car l'échographiste commet une erreur chez les garçons dans 1 cas sur 4
- c - La probabilité pour qu'il s'agisse d'une fille est de 0,80 notamment car l'échographiste ne commet pas d'erreur chez les filles
- d - L'échographie a une sensibilité de 75% mais une spécificité de 100% dans la prédiction du sexe féminin
- e - L'échographie a une sensibilité de 100% mais une spécificité de 75% dans la prédiction du sexe féminin

2009

Une boîte d'ampoules contient n_1 ampoules d'un médicament X et, suite à une erreur, n_2 ampoules d'un produit Y. On s'interroge sur l'expérience qui consiste à choisir une ampoule dans cette boîte, et noter le produit qu'elle contient.

QCM 1 Pour que cette expérience soit aléatoire, il faut nécessairement ... Dire la(les) proposition(s) vraie(s)?

- a - que les ampoules de X et de Y soient strictement identiques
- b - que les ampoules de X et de Y soient indiscernables dans les conditions de l'expérience
- c - qu'il y ait au moins $n_1 = 1$ ampoule de X et $n_2 = 1$ ampoule de Y
- d - qu'il y ait autant d'ampoules de X et de Y ($n_1 = n_2$)
- e - que le nombre d'ampoules de Y soit petit devant le nombre d'ampoules de X

QCM 5 On considère que trois types de boîtes étiquetées X ont été conditionnées puis adressées à l'hôpital. Leur composition est tabulée ci-dessous :

Type de boîtes	A	B	C
Nombre d'ampoules de X	10	99	98
Nombre d'ampoules de Y	0	1	2
Proportion de boîtes		0,01	0,001

Une infirmière choisit une unique ampoule dans une boîte d'ampoules étiquetée X. Dire LA proposition vraie.

- a - La probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule de Y est 1%
- b - La probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule de Y est 1,1%
- c - La probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule de Y est 0,01%
- d - La probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule de Y est 0,012%
- e - Il manque une donnée dans le tableau pour calculer cette probabilité

QCM 6 Après l'avoir choisie, l'infirmière regarde attentivement l'étiquette de l'ampoule et constate qu'il s'agit d'une ampoule du produit Y. Quelle est la probabilité que la boîte dont elle est issue ne contienne maintenant plus aucune ampoule de Y? Dire LA proposition vraie.

- a - 1/10
- b - 1/6
- c - 1/3
- d - 1/2
- e - 5/6

2008

Huit étudiants souhaitent organiser une fête de fin d'année. Ils décident d'envoyer des invitations, tout en réalisant l'organisation de cette fête en parallèle.

QCM 1 Leur première décision est de choisir la date de la fête, un samedi soir. En supposant qu'ils tirent au hasard uniforme la date dans les 40 semaines de 2008 hors vacances universitaires (12 en hiver, 12 au printemps, 12 à l'automne et 4 en été), et qu'ils retiennent le numéro de la semaine sélectionnée, dire LA proposition vraie.

- a - Il s'agit d'une expérience aléatoire qualitative
- b - Il s'agit d'une expérience aléatoire discrète
- c - Il s'agit d'une expérience aléatoire continue
- d - La probabilité de choisir l'une des saisons possibles est constante
- e - La probabilité de choisir l'un des samedis possibles est nulle

QCM 2 Les huit étudiants aimeraient chacun que la fête ait lieu la semaine de leur anniversaire. On supposera que les huit étudiants ont chacun leur anniversaire une semaine différente dans les 40 semaines retenues (12 en hiver, 12 au printemps, 12 à l'automne et 4 en été), indépendamment de la saison. Soit S, le samedi tiré au sort. Dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité que S soit au printemps est 0,025
- b - La probabilité que S soit au printemps est 0,30
- c - La probabilité que S soit dans la semaine d'un anniversaire est 0,20
- d - La probabilité que S, tiré dans la semaine d'un anniversaire, soit au printemps est 0,06
- e - La probabilité que S, tiré dans la semaine d'un anniversaire, soit au printemps est 0,30

2006

Chaque année, 3 à 5 millions d'individus dans le monde sont touchés par une grippe sévère, qui entraîne 250 000 à 500 000 décès.

QCM 1 On vous demande de quantifier la proportion de décès chez les individus ayant une grippe sévère. Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est vraie?

- a - Elle est comprise entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$
- b - Elle est comprise entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{5}{6}$
- c - Elle est comprise entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{10}$
- d - Elle est comprise entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{6}$
- e - Elle est comprise entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{10}$

2021 Session 2

On dispose d'un test pour savoir si une personne est atteinte de la maladie I . On note M l'événement "être atteint de la maladie I ".

La probabilité que ce test soit positif si la personne est atteinte de I est $P(T^+|M) = 0,99$. La probabilité que ce test soit négatif si la personne est naïve est $P(T^-|\bar{M}) = 0,90$. On suppose que la prévalence π de la maladie I est de 20%. Soit π_+ la probabilité qu'un patient soit atteint de I sachant que son test est positif.

Question n°8 Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. π_+ dépend de la valeur de π
- B. π_+ vaut 0,71 à 0,01 près
- C. Si $P(T^-|\bar{M})$ augmente, π_+ augmente aussi
- D. Si $P(T^-|\bar{M}) = P(T^+|M)$, π_+ vaut toujours 0,5
- E. Les événements M et $\bar{M}$ sont indépendants