

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

1) on donne $\vec{u}(-1; 0; 1)$; $\vec{v}(-10; 6; -1)$ et $\vec{w}(3; -2; 1)$.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : On a $y_{\vec{u}} = 0$ mais $y_{\vec{v}} \neq 0$, ainsi aucune proportionnalité n'est possible, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Faux.

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires : On cherche deux réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -x - 10y \\ -2 = 6y \\ 1 = x - y \end{cases}$$

:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 10y = -3 + \frac{10}{3} = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} = y \\ x - y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 1 \end{cases} \quad . \text{Aucun couple } (x; y) \text{ ne vérifie } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires **Faux**.

Ou bien

Soit a, b et c trois réels tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 10b + 3c = 0 \\ 6b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 10b + 18b = 0 \\ c = 6b \\ a - b + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b - 10b + 18b = 0 \\ c = 6b \\ a = -5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Les trois vecteurs sont non coplanaires (sont linéairement indépendants).

2) on donne $A(2; -3; 1)$, $B(-3; 1; -3)$ et $C(2; -1; 3)$.

a) ABC est un triangle rectangle :

Il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et ensuite

les carré des longueurs $AB^2 = 25 + 16 + 16 = 57$; $AC^2 = 8$ et $BC^2 = 65$.

On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, par le théorème de Pythagore réciproque, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A . Vrai.

b) Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à l'axe (Ox) :

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en A est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$, noté

I . Ainsi, $I \begin{pmatrix} \frac{-3+2}{2} \\ \frac{1-1}{2} \\ \frac{-3+3}{2} \end{pmatrix}$, soit $I \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat. Vrai.

c) Le centre de gravité ABC a pour coordonnées $(1; -1; 1)$.

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des médianes situé à $\frac{2}{3}$ d'un sommet. On note G celui de ABC , il vérifie donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 2 = \frac{2}{3}(-0, 5 - 2) \\ y_G + 3 = \frac{2}{3}(0 + 3) \\ z_G - 1 = \frac{2}{3}(0 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G = -1 \\ z_G = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ Faux.}$$

3) On donne $A(2; -3; 1)$, $B(4; 2; 2)$ et $C(6; -5; 3)$.

a) A, B et C définissent un plan.

Ces points sont distincts et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On cherche un réel k tel que

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 4k \\ 5 = -2k \\ 1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 = k \\ -2,5 = k \\ 0,5 = k \end{cases} \text{ pas de solution}$$

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Faux

b) La droite (AB) coupe l'axe (Oy) en $D(0; -8; 0)$:

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} \text{ et } D(0; -8; 0) \in (Oy). \text{ Vrai.}$$

4) Donner une représentation paramétrique de cette droite dans le repère repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x; y; z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2t \\ y + 3 = 5t \\ z - 1 = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

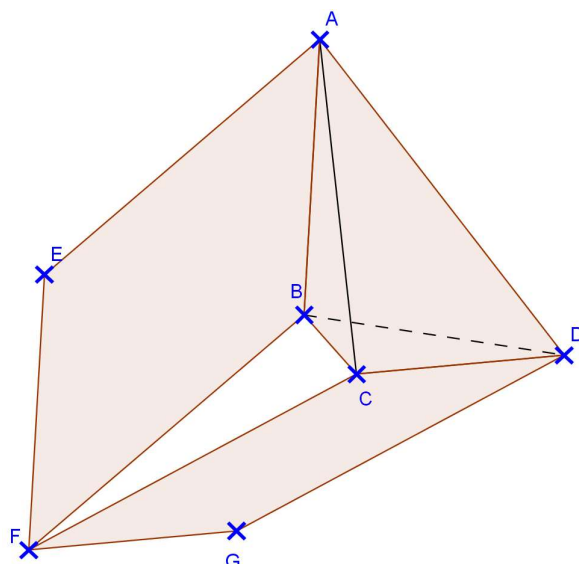
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

$ABCD$ est un tétraèdre. E est le symétrique de D par rapport à B .

F est le point tel que $ABFE$ est un parallélogramme et G est le point tel que $CDGF$ est un parallélogramme.

1) Faire une figure.



2) a) Démontrer que les points A, B, C et G sont coplanaires.

(On pourra déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{BG} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC}$) :

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, car Chasles, B est le milieu de $[DE]$, $ABEF$ et $CDGF$ sont parallélogrammes (donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CD}$).

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. Ainsi A, B, C et G sont coplanaires.

b) Que représente le point B pour le triangle ACG :

$\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG}$
si on note I le milieu de $[AC]$.

Ainsi, $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GI}$. Le point B est le centre de gravité du triangle ACG .

3) a) Justifier que le quadruplet $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ constitue un repère R de l'espace.

Les points A, B, C et D sont non coplanaires car $ABCD$ est un tétraèdre.

b) Déterminer, dans R , les coordonnées des points E, F et G .

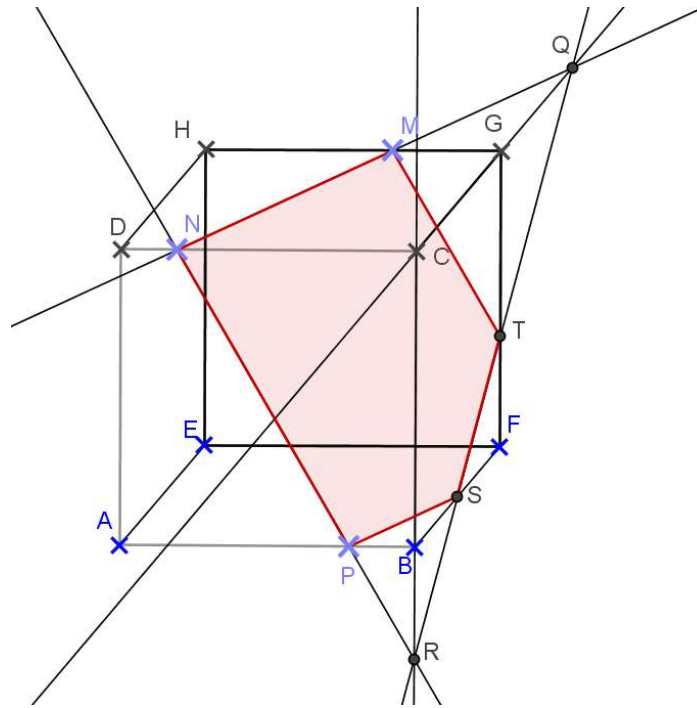
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. ainsi $E(2; 0; -1)$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. ainsi $F(3; 0; -1)$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Ainsi $G(3; -1; 0)$.

Exercice 4

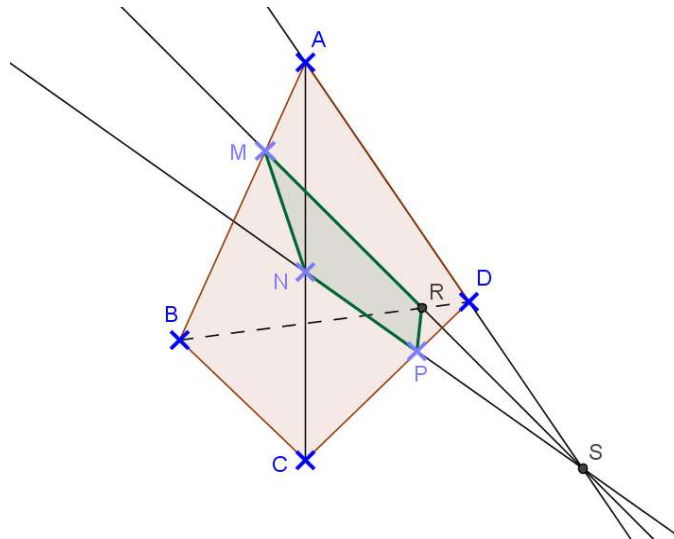
On trace la droite (MN) qui est dans le plan de dessus. Elle coupe donc (CG) en Q . De même, dans le plan de devant, (NP) et (BC) se coupent en R . On a ainsi obtenu deux points Q et R du plan (MNP) qui sont aussi dans le plan de droite. La droite (QR) coupe les arêtes $[FG]$ et $[BF]$ de ce plan en T et S et la section cherchée est le pentagone $MNPST$.



Exercice 5

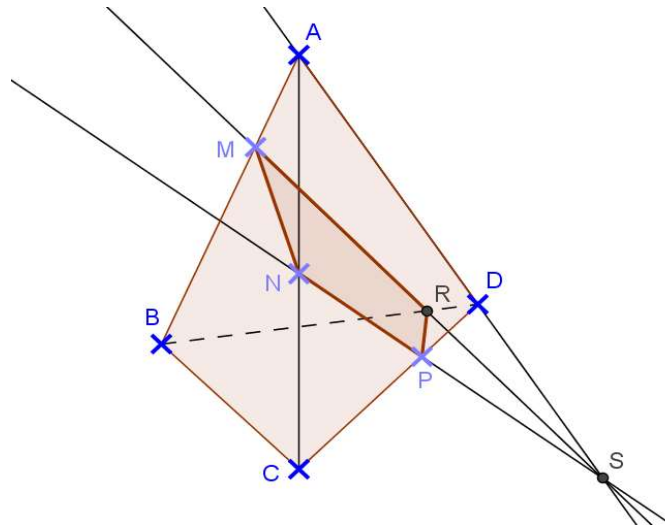
1ère méthode

On trace la droite (MN) . Comme elle est dans le plan (ABC) , elle coupe la droite (BC) en Q (sauf si elle lui est parallèle). (Bien entendu, il faut prolonger le segment $[BC]$ pour avoir une intersection. On trace alors la droite (PQ) . Comme elle est dans le plan (BCD) elle coupe (BD) en R qui est le point cherché. On peut alors finir de tracer la section du tétraèdre par le plan (MNP) . La construction se fait à la règle seule.



2ème méthode

On trace d'abord la droite (NP) qui coupe (AD) en S (sauf si elle lui est parallèle). On trace ensuite (MS) qui coupe (BD) en R .



Cas particuliers : Les cas de parallélisme se traitent alors par l'une ou l'autre méthode, sauf si on a la fois (MN) parallèle à (BC) et (NP) parallèle à (AD) . Dans ce cas on obtient R comme intersection de (BD) avec la parallèle à (MN) passant par P (mais on a besoin du compas). On peut utiliser la parallèle à (NP) par R car $MNPR$ est un parallélogramme.

