

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

**Annales classées corrigées**

Variables Aléatoires

**SUJET**

**2023****Exercice 2**

Vous êtes anesthésiste dans un hôpital parisien, en charge de la planification de l'activité du bloc opératoire.

**Question n°6** L'une des opérations fréquentes faites par les chirurgiens de la main est la décompression nerveuse du canal carpien. La durée de cette chirurgie, que l'on propose de modéliser par une loi exponentielle est en moyenne de 12 minutes. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (où lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Les chirurgies durent entre 10 et 20 minutes dans 25 % des cas (à 1% près)
- B. Si une opération n'est pas terminée au bout de 12 minutes, la probabilité que sa durée totale soit inférieure à 24 minutes est de 50 % (à 1 % près)
- C. La moitié des opérations dure moins de 8,3 minutes (à 0,1 minute près)
- D. Si on considère 60 opérations faites sur une journée, on peut modéliser la durée d'une opération par une loi normale
- E. La variance de la durée d'une opération est de 144 minutes<sup>2</sup>

**2022**

**Question n°9** Du fait des procédures d'analyse et d'envoi des résultats, on peut considérer que le délai d'information des passagers sur le résultat de leur test est en moyenne théorique de 48 h. On propose de modéliser ce délai par une loi exponentielle. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. La variance du délai est inférieure à son espérance
- B. La probabilité d'un délai égal à 48 h est nulle
- C. Le délai médian est strictement supérieur à 48 h
- D. La probabilité d'avoir le résultat en moins de 24 h est de 0,39 (à 0,01 près)
- E. La probabilité d'avoir le résultat entre 24 h et 48 h est de 0,24 (à 0,01 près)

**2021**

**Question n°9** Le service post-urgence doit décontaminer les chambres tous les matins à 8h. Après application d'un désinfectant, le délai de disparition de l'agent pathogène responsable de l'épidémie suit une loi exponentielle de médiane 4 heures pour une chambre donnée. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. Si on n'utilise pas la chambre pendant 12 heures après l'avoir désinfectée, il y a 87,5% (à 1% près) de chance qu'elle soit décontaminée
- B. Lors d'une journée, si la chambre est désinfectée le matin à 8h, le lendemain matin à 8h elle sera décontaminée de manière certaine
- C. Lors d'une journée, si la chambre est désinfectée le matin à 8h et que l'agent pathogène est toujours présent à 12h, il y a 50% (à 1% près) de chance qu'il ait disparu à 16h.
- D. La probabilité que le délai de disparition de l'agent pathogène soit inférieur à 8 heures vaut 75% (à 1% près)
- E. On s'attend à ce que la chambre soit en moyenne décontaminée en 2,8 heures (à 0,1 heure près) après la désinfection

Le responsable de l'hôpital de Dache décide de mettre en place un système d'évaluation de la satisfaction des patients hospitalisés. Cet hôpital ne comprend que 2 services (Service A et Service B). A la sortie de l'hôpital, on demande à chaque patient de donner une note de satisfaction à propos de leur hospitalisation. Cette note est mesurée sur l'échelle des entiers compris entre 0 et 10 (0 correspondant à une absence totale de satisfaction et 10 à une satisfaction maximale).

**Question n°1** Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. La note est une donnée quantitative discrète
- B. On peut modéliser la note par une loi exponentielle car les notes ne sont pas bornées
- C. On peut modéliser la note par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 11$  : elle aura la bonne espérance
- D. On peut modéliser la note par une loi uniforme sur  $[0,10]$  car les notes sont continues
- E. On peut utiliser une loi de Bernoulli pour modéliser la probabilité que la note soit strictement supérieure à 3

**Question n°2** Soit  $X_A$ , la variable aléatoire correspondant à la note donnée par un patient à sa sortie du service A. La distribution de  $X_A$  est symétrique et vérifie  $P(X_A = 0) = 0,05$ ,  $P(X_A = 1) = 0,05$ ,  $P(X_A = 2) = 0,05$ ,  $P(X_A = 3) = 0,1$ ,  $P(X_A = 4) = 0,1$ ,  $P(X_A = 5) = 0,3$ . La variance de  $X_A$  vaut 6.

Codiez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A.  $E(X_A) = 6$
- B.  $E(X_A^2) = 31$
- C. La médiane de  $X_A^2$  est inférieure à son espérance
- D.  $P(X_A > 5) = 0,5$
- E.  $P(X_A = 9) = 0$

2018

**Question n°3**

L'Assemblée nationale le 27 octobre 2017 a voté une loi rendant également obligatoire pour les enfants de moins de 2 ans l'ensemble de ces 8 vaccins. La loi doit être appliquée à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2018. Néanmoins, la ministre a déclaré « *Nous laisserons évidemment le temps aux familles de se mettre en ordre de marche, car il est hors de question de pousser les gens à vacciner dans l'urgence* ». En supposant que le délai d'application de l'obligation vaccinale suive une loi exponentielle de moyenne 3 mois, que diriez-vous pour les familles concernées en 2018 ?

Cochez la ou les bonnes réponses.

- A. La probabilité pour qu'une famille concernée se mette « *en ordre de marche* » et applique la loi dans les 3 mois est de 5% (à 1% près).
- B. La probabilité pour qu'une famille concernée attende au moins 6 mois pour se mettre « *en ordre de marche* » est de 14% (à 1% près).
- C. Si la famille ne s'est pas mise « *en ordre de marche* » dans les 3 mois, la probabilité pour qu'elle le fasse avant le 6<sup>ème</sup> mois est supérieure à 60%.
- D. On peut s'attendre à ce que plus de 98% des familles concernées se soient mises en « *ordre de marche* » avant 2019.
- E. La variabilité attendue du délai de mise « *en ordre de marche* » peut être quantifiée par une variance de 3 mois.

2017

Le directeur d'un hôpital de moyen séjour souhaite commander des vaccins contre la grippe pour son personnel de santé, car il a décidé que chacun devrait être vacciné avant l'hiver.

Son établissement compte 4 services. Dans chaque service, le personnel de santé est composé de 25 personnes travaillant le jour et 5 personnes travaillant la nuit. Il sait aussi que la probabilité de se faire vacciner en dehors de son établissement par un médecin généraliste est de 10% ; pour ces personnels, l'hôpital n'aura pas à fournir le vaccin.

NB : Pour tout l'exercice, on supposera que l'ensemble des personnels agissent indépendamment les uns des autres concernant la vaccination

**Question n°10** On s'intéresse au nombre  $X$  d'individus du personnel de santé qui vont se faire vacciner dans l'établissement. Cochez la(les) proposition(s) exacte(s).

- A.  $X$  est une variable qualitative.
- B.  $X$  est une variable aléatoire.
- C. L'espérance de  $X$  vaut 12.
- D.  $P(X = 108) = 0$ .
- E. La fonction de répartition de  $X$  est discontinue en marches d'escalier.

**Question n°13** Le fabricant des vaccins indique que le délai  $T$  (en semaines) d'obtention d'une immunité suffisante pour protéger de la grippe après vaccination suit une loi exponentielle d'espérance 1. Cochez la(les) proposition(s) exacte(s).

- A. Cinq jours après la vaccination, il y a plus de 50% de chance qu'un individu soit protégé.
- B.  $T$  est une variable aléatoire discrète.
- C. La probabilité de ne pas avoir une immunité suffisante pour protéger de la grippe à 2 semaines sachant qu'un individu ne l'a pas à 1 semaine est de 37% (à 1% près).
- D. La probabilité de ne pas avoir une immunité suffisante pour protéger de la grippe à 3 semaines sachant qu'un individu ne l'a pas à 2 semaines est de 37% (à 1% près).
- E. La probabilité de ne pas avoir une immunité suffisante pour protéger de la grippe à 3 semaines est de 5% (à 1% près).

2016

**Question n°3** Il diagnostique un cas d'infection à méningocoques chez un enfant présentant de la fièvre, le traite par antibiotique et l'hospitalise. Sous un traitement adapté, on sait que dans ces conditions le délai de disparition de la fièvre suit une loi exponentielle d'espérance 24h. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. Il y a 50% de chance (à 3% près) que la fièvre disparaisse au bout de 17h.
- B. Il y a 50% de chance (à 3% près) que la fièvre disparaisse au bout de 24h.
- C. Il y a moins de 5 % de risque que l'enfant ait encore de la fièvre au bout de 3 jours.
- D. Si l'enfant a encore de la fièvre au bout de 24h, il a 50% de chance (à 2% près) de ne plus en avoir au bout de 24h supplémentaires.
- E. Si l'enfant a encore de la fièvre au bout de 24h, il a 75% de chance (à 2% près) de ne plus en avoir au bout de 24h supplémentaires.

**Question n°4** Les méningocoques sont parfois résistants à l'antibiothérapie standard. Les données précédentes concernaient les malades sans résistance. Chez les patients infectés par des méningocoques résistants, la fièvre ne disparaît jamais sous antibiothérapie standard. Pour faire le diagnostic de résistance, on considère qu'une fièvre de plus de 24h signe une résistance. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. La probabilité que la fièvre dure plus de 24h si les méningocoques sont résistants vaut 100% (à 1% près).
- B. La probabilité que la fièvre dure plus de 24h si les méningocoques ne sont pas résistants vaut 63% (à 1% près).
- C. La probabilité que les méningocoques soient résistants si la fièvre persiste plus de 24h dépend de la prévalence de la résistance.
- D. La probabilité que les méningocoques ne soient pas résistants si la fièvre ne persiste pas plus de 24h vaut 100% (à 1% près) dans cette population.
- E. La puissance du test diagnostique proposé est de 80% (à 1% près).

**2015**

QCM 3 – Sur l'une de leurs pancartes, les manifestants ont rapporté l'information suivante *Le citoyen doit attendre aujourd'hui en moyenne 30 jours avant de pouvoir décrocher un rendez-vous chez un médecin spécialiste*. Si l'on suppose que le délai de rendez-vous suit une loi exponentielle, cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s) (à 0,025 près).

- A - La probabilité pour qu'un citoyen attende moins de 30 jours est 0,50
- B - La probabilité pour qu'un citoyen attende moins de 6 semaines est 0,75
- C - La probabilité pour qu'un citoyen attende plus de 6 semaines est 0,75
- D - La probabilité s'il n'a pas eu de rendez-vous dans les 30 jours d'en avoir un dans les 15 jours est 0,40
- E - La probabilité s'il n'a pas eu de rendez-vous dans les 30 jours d'en avoir un dans les 15 jours est 0,25

**2012**

Le docteur N est nommé expert auprès du Tour de France pour organiser le contrôle de dopage des coureurs cyclistes. Il dispose des données enregistrées sur les 10 dernières années, et du tableau suivant sur ces coureurs (200 par an), selon le rang d'arrivée des coureurs. On classe les coureurs dans deux catégories : du 1<sup>er</sup> au 10<sup>ème</sup>, et du 11<sup>ème</sup> au 200<sup>ème</sup>.

| Caractéristique                                            | des 10 premiers | Des 11èmes-200èmes | Total      |
|------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------|------------|
| Age, moyenne $\pm$ écart-type                              | 25 $\pm$ 4      | 26 $\pm$ 4         | 26 $\pm$ 4 |
| Age < 18                                                   | 4%              | 2,5%               | 2,6%       |
| Durée moyenne sur la dernière étape des Champs Elysées (h) | 1,5             | 2                  | 2          |
| Recherche de toxique dans les urines*                      | 80%             | 20%                | ?          |
| Proportion de détectés dopés sur les urines analysées      | 1%              | 1%                 | 1%         |

\* réalisée de façon aléatoire sur chaque catégorie de classement

QCM 2 - En supposant que la vitesse des coureurs à la dernière étape suit une loi exponentielle, que peut-on dire de la probabilité qu'un coureur classé dans les 10 premiers mette plus de 3h pour l'effectuer (à 1% près)? Cochez LA proposition exacte

- A. Environ 14%
- B. Environ 22%
- C. Environ 78%
- D. Environ 86%
- E. Il manque l'écart-type de la distribution pour répondre

**2011**

Un médecin décide de réaliser l'expérience suivante dans son laboratoire. Il dispose d'une boîte en forme d'étoile à cinq branches au bout desquelles sont situées des niches numérotées de 1 à 5, dont seule l'une d'entre elles contient du fromage. Il place une souris au centre de cette boîte et note la niche où se réfugie la souris.

**QCM 1** Parmi les réponses suivantes, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité pour que la souris trouve le fromage est de  $1/5$
- b - La probabilité pour que la souris trouve le fromage est de  $1/2$
- c - On peut modéliser l'expérience par une variable aléatoire de Bernoulli
- d - On peut modéliser l'expérience par une variable aléatoire discrète
- e - Toutes les propositions sont fausses

**QCM 4** Il décide maintenant d'enregistrer le temps  $Y$  en secondes que mettent les souris à trouver le fromage. Il enregistre le temps en comptant les secondes à voix haute. Parmi les réponses suivantes, dire LA proposition vraie.

- a - Il peut modéliser  $Y$  par une loi exponentielle car l'échelle de mesure est continue
- b - Il peut modéliser  $Y$  par une loi exponentielle car l'échelle de mesure est discrète
- c - Il peut modéliser  $Y$  par une loi de Poisson car la probabilité de succès à chaque seconde est rare
- d - Il peut modéliser  $Y$  par une loi binomiale car l'échelle de mesure est bornée
- e - La loi exponentielle n'est pas le meilleur choix de modélisation pour  $Y$  eu égard à l'échelle

**QCM 5** Il suppose que  $Y$  suit une loi exponentielle de moyenne 5. Parmi les réponses suivantes, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité pour qu'une souris trouve le fromage en 5 secondes exactement est nulle
- b - La probabilité pour qu'une souris trouve le fromage en 5 secondes au plus est de 0,6 (à 0,05 près)
- c - La probabilité pour qu'une souris trouve le fromage en 5 secondes au plus est de 0,4 (à 0,05 près)
- d - Si une souris n'a pas trouvé le fromage en moins de 5 secondes, la probabilité pour qu'elle le trouve en moins de 10 secondes est supérieure à 0,95
- e - Si une souris n'a pas trouvé le fromage en moins de 5 secondes, la probabilité pour qu'elle le trouve en moins de 10 secondes est supérieure à 0,60

**2010**

L'échographie est utilisée pour détecter *in utero* les malformations fœtales. Elle permet également de prédire avant la naissance le sexe de l'enfant. Cependant, les erreurs commises par les échographistes ne sont pas symétriques : en effet, les filles sont toujours correctement identifiées, alors que les garçons sont identifiés comme des filles une fois sur 4. On considérera que 50% des naissances sont de sexe féminin.

**QCM 6** Il décide de recontacter 100 femmes pour lesquelles il a commis une erreur dans l'appréciation du sexe de l'enfant il y a plus d'un an pour les interroger sur leur perception de son erreur à la naissance de leur enfant. On suppose que le délai de réponse après l'envoi de son courrier (qui est en moyenne de 30 jours) suit une loi exponentielle. Dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - 40% (à 1% près) des femmes auront répondu dans les 15 jours après l'envoi
- b - 40% (à 5% près) des femmes n'auront pas répondu dans les 30 jours après l'envoi
- c - 40% (à 1% près) des femmes qui n'auront pas répondu dans les 15 jours répondront entre 15 et 30 jours après l'envoi
- d - 40% (à 5% près) des femmes auront répondu entre 15 et 30 jours après l'envoi
- e - Il manque le paramètre de la loi exponentielle pour répondre

**2008**

- QCM 5** Les huit étudiants décident d'envoyer 1200 invitations. Chacun met en moyenne 10 secondes pour mettre une invitation sous enveloppe et la cacheter. Sous l'hypothèse que la durée de mise sous enveloppe d'une invitation est exponentielle, dire LA proposition vraie.
- a - Il y a au plus une chance sur 3 qu'un étudiant ait fini une invitation en moins de 10 secondes
  - b - Il y a au plus une chance sur 6 qu'un étudiant ait fini une invitation en moins de 10 secondes
  - c - Il y a au plus une chance sur 10 qu'un étudiant ait fini une invitation en moins d'une minute
  - d - Il y a au plus une chance sur 100 qu'un étudiant ait fini une invitation en moins d'une minute
  - e - Il y a au plus une chance sur 100 qu'un étudiant n'ait pas fini une invitation en moins d'une minute

**2007**

- QCM 1** Un secrétariat hospitalier a établi sur plusieurs années la distribution du nombre  $X$  d'appels téléphoniques par minute les jours ouvrés de la semaine (Lundi à Vendredi), tabulée ci-dessous.

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Nombre appels, $x$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| $P(X \leq x)$      | 0,05 | 0,15 | 0,30 | 0,50 | 0,70 | 0,85 | 0,95 | 1,00 |

A partir de ce tableau, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - Le nombre médian d'appels par minute est de 3
  - b - Le nombre médian d'appels par minute est de 4
  - c - Le nombre moyen d'appels par minute est inférieur au nombre médian
  - d - Il y a autant de jours en moyenne avec moins de deux appels par minute qu'il y en a avec plus de cinq
  - e - La probabilité de recevoir au plus 2 appels par minute est égale à 0,30
- QCM 3** Parmi les minutes avec plus de 4 appels, quelle proportion en reçoit sept? Dire **la proposition vraie**.
- a - 1/20
  - b - 1/10
  - c - 1/6
  - d - 1/3
  - e - 1/2

- QCM 4** La distribution du nombre d'appels téléphoniques par minute le week-end (Samedi, Dimanche), est tabulée ci-dessous.

|            |      |      |      |      |
|------------|------|------|------|------|
| Nombre     | 0    | 1    | 2    | 3    |
| Proportion | 0,35 | 0,35 | 0,20 | 0,10 |

Globalement, sur tous les jours de la semaine, quelle proportion de minutes ne reçoit aucun appel? Dire **la proposition vraie** (à 2,5% près).

- a - 5%
- b - 15%
- c - 35%
- d - 40%
- e - 95%

**QCM 3** On s'intéresse à la mesure de la température corporelle des patients atteints de grippe sévère. Une infirmière vous rapporte, pour deux patients, une température de 39 et de 40. Que pouvez-vous en conclure quant à cette mesure ? Parmi les propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraie(s) ?

- a - C'est le résultat d'une expérience aléatoire
- b - C'est le résultat d'une expérience aléatoire qualitative
- c - C'est une variable aléatoire
- d - On peut affirmer avec certitude que c'est une variable aléatoire continue
- e - On peut affirmer avec certitude que c'est une variable aléatoire discrète

**2023 Session 2**

**Exercice 2**

Dans Paris, hors période de grève, la moitié des camions-bennes à ordures (appelés bennes par la suite) est gérée par la mairie et l'autre moitié par des prestataires privés. On note  $X_n$  le nombre de bennes gérées par la mairie parmi  $n$  bennes prises au hasard ( $n \geq 1$ ). Le nombre total de bennes est suffisamment grand pour considérer que les bennes sont tirées au sort indépendamment avec remise.

**Question n°6** On modélise la durée d'une tournée de collecte des déchets pour une benne par une loi exponentielle. On considère que la durée moyenne d'une tournée pour une benne est de 120 minutes. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. La médiane de la durée d'une tournée pour une benne est de 83 minutes (à 1 minute près)
- B. La variance de la durée d'une tournée pour une benne est de  $120^2$  minutes<sup>2</sup>
- C. Si la tournée d'une benne dure plus de 120 minutes, la probabilité que sa durée totale soit supérieure à 240 minutes est de 0,25 (à 0,01 près)
- D. On peut approximer la durée de la tournée d'une benne par une loi normale de moyenne 120 minutes et de variance 14400 minutes<sup>2</sup>
- E. On peut approximer la durée moyenne des tournées de 100 bennes par une loi normale de moyenne 120 minutes et de variance 144 minutes<sup>2</sup>

**Question n°7** En fait, suite à une grève du ramassage, des déchets se sont accumulés dans certains arrondissements. A la reprise du travail, la durée se modélise par une loi exponentielle de moyenne 200 minutes dans ces arrondissements (contre 120 minutes dans les arrondissements non-grévistes). On considèrera que les arrondissements grévistes concernent 40% des bennes à l'échelle de Paris.

Pour une benne donnée, vous savez que le ramassage a duré plus de 120 minutes et vous voulez déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un arrondissement gréviste. Parmi ces intervalles, lequel contient cette probabilité?

- A.  $[0,45; 0,55[$
- B.  $[0,55; 0,65[$
- C.  $[0,65; 0,75[$
- D.  $[0,75; 0,85[$
- E.  $[0,85; 0,95[$

**2022 Session 2**

**Question n°9** Si on conserve des prélèvements de protéine P à température ambiante, elle se dégrade rapidement et, en moyenne, son dosage devient ininterprétable au bout de deux heures. On choisit de modéliser ce délai de dégradation par une loi exponentielle. Parmi les propositions suivantes, **laquelle** correspond à la probabilité qu'un dosage devienne ininterprétable en moins de deux heures et demie, sachant qu'il était encore interprétable au bout d'une heure (à 0,01 près)?

- A. 0,82
- B. 0,78
- C. 0,71
- D. 0,63
- E. 0,53

**2021 Session 2**

**Exercice 2**

On considère dans cet exercice une maladie infectieuse  $I$ . Supposons qu'une fois la maladie  $I$  déclarée chez un patient donné, la durée  $T$  pendant laquelle le patient est contaminant suit une loi exponentielle d'espérance  $\mu = 4$  jours.

**Question n°6** Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A.  $T$  est une variable aléatoire discrète
- B.  $P(T = 4) = 0,5$
- C. La médiane de  $T$  vaut 2,8 jours à 0,1 près
- D. Le paramètre de la loi exponentielle vaut  $0,25 \text{ jour}^{-1}$
- E. Il y a 95% de chances que le patient ne soit plus contaminant à 12 jours à 1% près