

Exercices Pgcd, Bézout, Gauss

Pgcd

- 1** 1. Déterminer les entiers naturels n tels que :
 $\text{PGCD}(n, 378) = 54$.
2. En déduire parmi eux les entiers naturels n inférieurs à 500.
- 3** Trouver tous les entiers naturels a et b avec $a < b$ tels que :
 $ab = 7\,776$ et $\text{PGCD}(a, b) = 18$.

- 42** Déterminer les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que :
 $\text{PGCD}(a, b) = 18$ et $a + b = 360$.

- 47** Soit n un naturel non nul.
On pose $a = 5n + 1$ et $b = 2n - 1$.
On note $D = \text{PGCD}(a, b)$.
1. Démontrer que les valeurs possibles de D sont 1 ou 7.
2. Déterminer les entiers n tels que :
 $a \equiv 0 \pmod{7}$ et $b \equiv 0 \pmod{7}$.
3. En déduire, suivant les valeurs de n , la valeur de D .

- 49** Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver :
- a) $\text{PGCD}(4\,935, 517)$
b) $\text{PGCD}(2\,012, 7\,545)$
c) $\text{PGCD}(18\,480, 8\,745)$

- 51** Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que :
 $\text{PGCD}(a, b) = 7$.
La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : 3 ; 1 ; 1 ; 3.
Quelles sont les valeurs de a et b ?

- 53** Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement comme reste 10 et 11.
Quel est ce diviseur ?

Bézout

- 11** 1. Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que :
 $87x + 31y = 1$.

- 12** 1. Montrer que 38 et 45 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $38x + 45y = 1$.

- 13** 1. Montrer que deux entiers naturels consécutifs sont premiers entre eux.
2. Montrer que deux entiers naturels impairs consécutifs sont premiers entre eux.

- 16** Montrer que la fraction $\frac{14n+3}{5n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

- 58** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
« S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 5$ alors $\text{PGCD}(a, b) = 5$. »

- 65** Prouver que la fraction $\frac{n^3 + n}{2n + 1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

- 67** L'équation $6x + 3y = 1$ admet-elle des solutions ? Et l'équation $7x + 5y = 1$?

Gauss

- 17** 1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ tels que : $33x - 45y = 0$.

2. En déduire les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ tels que : $33x + 45y = 12$.

- 69** On considère dans un repère, les points $A(7; 2)$ et $B(-3; -4)$.

1. Montrer qu'un point $M(x; y)$ appartient à la droite (AB) si $3(x - 7) = 5(y - 2)$.
2. En déduire l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant à la droite (AB).

- 20** Soit n un entier naturel.
Montrer que $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6.

- 21** On considère le polynôme $P(x) = x^2 + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si $P(x)$ admet une racine rationnelle α alors α est entier.
2. En déduire que $\sqrt{n}$ avec n entier est soit irrationnel, soit entier.

- 27** On pose $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1. Calculer α^2 puis $(\alpha^2 - 5)^2$.
2. Déterminer un polynôme du quatrième degré pour lequel α est une racine.
3. Prouver que α est irrationnel.

Equations diophantiennes

- 22** Soit l'équation
(E) : $15x + 8y = 5$.

1. Déterminer une solution particulière de l'équation : $15x + 8y = 1$.
2. En déduire une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

- 24** Soit l'équation
(E) : $29x - 13y = 6$.

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

75 1. Lisa veut mesurer une durée de 2 minutes avec deux sabliers, l'un mesurant une durée de 11 minutes et l'autre une durée de 5 minutes. Expliquer comment Lisa doit procéder.

2. Est-il possible pour Lisa de mesurer toute durée entière de d minutes avec ces deux sabliers ?

76 On veut résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}$.

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

1. Montrer que résoudre ce système revient à résoudre l'équation

$$(E) : 11u - 4v = 2$$

où u et v sont des entiers relatifs.

2. Résoudre l'équation (E).

3. En déduire les solutions de (S).

Approfondissements

92 Suite

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = 4u_n + 1.$$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{3}.$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

3. Calculer $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$.

95 Théorème des restes chinois

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. On désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que

$$17u + 5v = 1.$$

a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$.

b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.

Démontrer que n_0 appartient à S .

c) Donner un entier n_0 appartenant à S .

2. a) Soit n un entier relatif appartenant à S .

Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.

b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si, et seulement si, n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3. Application : Assa sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

126 Calcul de PGCD

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On pose $a = n^3 + 3n^2 - 5$ et $b = n + 2$.

Calculer $\text{PGCD}(a, b)$.

119 PPCM

Soit deux entiers relatifs a et b . On appelle $\text{PPCM}(a, b)$ le plus petit multiple strictement positif de a et de b .

1. Calculer $\text{PPCM}(18, 12)$ et $\text{PPCM}(24, 40)$.

2. Calculer $\frac{7}{6} + \frac{11}{15}$. Que représente $\text{PPCM}(6, 15)$?

120 PGCD et PPCM

Démo

Soit $D = \text{PGCD}(a, b)$ et $M = \text{PPCM}(a, b)$.

1. Montrer que : $\begin{cases} a = Da' \\ b = Db' \end{cases} \Rightarrow M = Da'b' \text{ et } \text{PGCD}(a', b') = 1.$

2. En déduire que : $DM = ab$.

137 PGCD et suite de Fibonacci

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 .

2. Montrer par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \times u_{n-1} - (u_n)^2 = (-1)^n.$$

En déduire que les termes u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Démontrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \geq 1$,

$$u_{n+p} = u_n \times u_{p-1} + u_{n+1} \times u_p.$$

4. a) Démontrer que :

$$\text{PGCD}(u_{n+p}, u_n) = \text{PGCD}(u_p, u_n).$$

b) En déduire que si r est le reste de la division de m par n alors :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(u_m, u_n) &= \text{PGCD}(u_r, u_n) \\ \text{PGCD}(u_m, u_n) &= u_{\text{PGCD}(m, n)} \end{aligned} \quad (1)$$

5. Application : calculer u_{12}, u_{18} .

Vérifier alors la relation (1) de la question **4. b)**

123 Soient $n, a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Montrer que si $a \wedge n = 1$ alors :

$$\text{pgcd}(ab, n) = \text{pgcd}(b, n)$$

124 Recherche du PGCD

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres : $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Démontrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisible par $(n - 4)$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le $\text{PGCD}(\alpha, \beta)$.

a) Trouver une relation entre α et β indépendante de n .

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. Démontrer que $(2n + 1)$ et n sont premiers entre eux.

4. a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le $\text{PGCD}(a, b)$.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.