

Exercice 1: (3pts)

a. $\forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{n+1} - 2$

calculons: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - 2 - \frac{1}{n+1} + 2$
 $= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$
 $= \frac{(n+1) - (n+2)}{(n+1)(n+2)}$
 $= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \quad 0,5$

$\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n \quad 0,5$

car $\begin{cases} n+1 > 0 \\ n+2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante à partir de 0

b. $\forall n \geq 0, v_n = 5 \times 3^{n+1}$

$v_{n+1} = 5 \times 3^{n+2} \quad 0,5$

calculons $v_{n+1} - v_n = 5 \times 3^{n+2} - 5 \times 3^{n+1}$
 $= 5 \times 3^{n+1} (3 - 1)$
 $= 5 \times 3^{n+1} \times 2$
 $= 10 \times 3^{n+1} \quad 0,5$

$\forall n \geq 0, v_{n+1} - v_n \geq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_n \quad 0,5$

$\Leftrightarrow (v_n)$ est croissante à partir de 0

Exercice 2: (3pts)

Montrons par récurrence:

$P_n: "1 \leq u_n \leq 2"$

Initialisation:

Si $n=0$ alors on a: $1 \leq u_0 \leq 2$ car $u_0=2$. 0,5

S_0 est vraie.

Hypothèse:

On suppose S_n vraie au rang n (H_n) . 0,5

Heredité:

On veut montrer que: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ 0,5

D'après (H_n) , on a: $1 \leq u_n \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2 \leq u_n + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 \quad |$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{1 \leq u_{n+1} \leq 2.}$$

S_n est héréditaire.

Conclusion:

$\forall n \geq 0, 1 \leq u_n \leq 2$. 0,5

Exercice 3: (8pts)

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}. \end{cases}$$

1. a. $u_1 = 2$; $u_2 = \sqrt{7}$ et $u_3 = \sqrt{10}$. 1pt - 0,5 par erreur

b. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique 0,5

② $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique 0,5

c. Montrons par récurrence:

③

$$P_n: "0 < u_n < u_{n+1}"$$

Initialisation:

$$\text{Si } n=0 \text{ alors } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = \sqrt{3}$$

$$\text{donc } 0 < u_0 < u_1 \quad 0,5$$

P_0 est vraie.

Hypothèse:

On suppose P_n vraie au rang n (H_n)

Hérédité:

On veut montrer que: $0 < u_{n+1} < u_{n+2}$

D'après (H_n) , on a: $0 < u_n < u_{n+1}$

$$1 \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow 0 < u_n^2 < u_{n+1}^2 \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow 3 < u_n^2 + 3 < u_{n+1}^2 + 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{u_n^2 + 3} < \sqrt{u_{n+1}^2 + 3} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} \end{array} \right.$$

P_n est héréditaire.

Conclusion: $\forall n \geq 0, 0 < u_n < u_{n+1}$ 0,5

$\forall n \geq 0, u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante à partir de } 0.$ 0,5

$$2. \forall n \geq 0, v_n = u_n^2$$

④ a. calculons: $\forall n \geq 0, v_{n+1} = u_{n+1}^2$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = u_n^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{v_{n+1} = v_n + 3} \quad 0,5$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 3 et $v_0 = 1$. 0,5

b. $\forall n \geq 0, \underline{v_n = 3n + 1}$ 0,5

① et $v_n = u_n^2 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{v_n}$ car $u_n > 0, \forall n \geq 0$
 $\Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_n = \sqrt{3n + 1}$ 0,5

c. Résolvons: $u_n \geq 50 \Leftrightarrow \sqrt{3n + 1} \geq 50$
 $\Leftrightarrow 3n + 1 \geq 2500$

① $\Leftrightarrow 3n \geq 2499$
 $\Leftrightarrow \underline{n \geq 833}$.

$u_n \geq 50$ pour $\forall n \geq 833$.