

Interrogation :
Suite et raisonnement par récurrence.

Exercice 1 : (2 points).

Étudier la monotonie des suites suivantes :

a. $\forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{n+1} - 2$.

b. $\forall n \geq 0, v_n = 5 \times 3^{n+1}$.

Exercice 2 : (3 points).

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 3 : (8 points).

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$$

1.
 - a. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
 - b. Montrer que la suite (u_n) est ni arithmétique et ni géométrique.
 - c. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, 0 < u_n < u_{n+1}$ et en déduire la monotonie de (u_n) .
2. On vient de démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est positif.
On pose $v_n = u_n^2$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et préciser son premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n .
 - c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 50$.