

22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 + x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

23 Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{x-3} & \text{si } x < k \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

1. Tracer les fonctions $x \mapsto \sqrt{x+2}$ et $x \mapsto \frac{x-4}{x-3}$ sur une calculatrice. Conjecturer la valeur de k pour laquelle f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer cette conjecture.

27 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5; 7]$.
b) Pourquoi la fonction f semble-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. a) Calculer les fonctions dérivées des fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$.
b) Calculer les nombres dérivés de ces deux fonctions en 1. Conclure.

28 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-4; 4]$ et $y \in [-2; 2]$.
b) Pourquoi la fonction semble-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
c) Déterminer l'expression de f suivant le signe de x .
d) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
e) Calculer les nombres dérivés en 0. Conclure.

48 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?
2. Démontrer cette conjecture.

52 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \frac{-x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

2. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
b) Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue en 0 ?

29 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$, et pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. On admet que la suite (u_n) est minorée par 0 et convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .

32 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. On admet que la suite (u_n) est convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .
2. Tracer sur une calculatrice la fonction f telle que $f(x) = x e^{-x}$ et la droite $y = x$. Contrôler la valeur de ℓ trouvée.

32 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. On admet que la suite (u_n) est convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .
2. Tracer sur une calculatrice la fonction f telle que $f(x) = x e^{-x}$ et la droite $y = x$. Contrôler la valeur de ℓ trouvée.

42 Soit la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}.$$

1. a) Justifier que f est continue sur I .
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I .
c) Montrer que la fonction f est croissante sur I .
2. On définit la suite $u_0 = -0,5$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ .

44 On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

- A ▶** Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
1. Étudier les variations de la fonction g .
 2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 3]$.
 3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- B ▶** 1. Calculer $f'(x)$ puis montrer que : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et en ± 1 .
 3. En déduire le tableau de variations de f .

45 Soit la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :

Algo

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

A ▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de la fonction g . (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

3. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement de α à 10^{-3} .

Donner le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B ▶ 1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}.$$

3. Déterminer le signe de f' sur $]-1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]-1; +\infty[$.

47 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :



$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x}).$$

A ▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.

2. Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\alpha \in [0; 1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B ▶ 1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

3. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$ puis déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-5)]$. En déduire que la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

C ▶ Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite D et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a $u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

56 Fonction et suite (1)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution.

Donner la valeur exacte de α puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

b) La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

58 Résolution d'équation

Soit l'équation : $(E) : 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4 = \pi\sqrt{x}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E) et de déterminer une approximation de chacune des solutions.

1. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α que l'on déterminera.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $f(x) = \pi$ pour $x \neq 0$.

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E) .

c) Donner un encadrement à 10^{-2} de la ou les solutions de (E) .