
UE SA03U050

**Corrigé de l'épreuve de Mathématiques
appliquées aux sciences 3**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A . En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A et leur multiplicité.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2.$$

En factorisant par $1 - \lambda$:

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda+2) = (1-\lambda)^2.$$

La matrice A admet donc **une seule valeur propre double** : $\boxed{\lambda_1 = 1}$.

2. Chercher l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

Cherchons les vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, soit :

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel que : } A Y = \lambda_1 Y \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I) Y = 0_{2 \times 1}.$$

$$\text{Ainsi : } \begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 2 \\ -2 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ -2 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Puis : } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=-x}.$$

L'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc :

$$\{Y\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

3. Soit P la matrice suivante : $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
Effectuer une vérification du calcul de P^{-1} .

* Calculons le déterminant de la matrice P :

$$\det(P) = (-2 \times (-2)) - 2 \times 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice } P \text{ est inversible.}$$

* Déterminons son inverse P^{-1} à l'aide de la formule du cours :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

* Effectuons une vérification du calcul de P^{-1} en calculant $P^{-1}P$:

$$P^{-1}P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure égale à : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6+2 & -4+1 \\ -6+4 & -4+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+3 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$

5. Calculer T^2 et T^3 , puis en déduire l'expression de T^n avec n un entier > 0 .

$$* T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$* T^3 = T^2 T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$* \text{ On en déduit : } T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } n \text{ entier } > 0.$$

Remarque : on peut démontrer ce résultat par récurrence.

i) Il est vérifié au rang $n = 1$.

ii) Supposons qu'il soit vrai au rang $n - 1$, soit $T^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et montrons qu'il est vrai

$$\text{au rang } n : T^n = T^{n-1} T = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) La relation étant vraie au rang 1 et vérifiée au rang n dès qu'elle l'est au rang $n - 1$, alors elle est vraie quel que soit n entier > 0 .

6. Montrer que $A^n = P T^n P^{-1}$. En déduire A^n pour tout n entier > 0 .

$$* P^{-1} A P = T \Leftrightarrow \underbrace{P P^{-1}}_I A \underbrace{P P^{-1}}_I = P T P^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A = P T P^{-1}}.$$

$$* A^n = (P T P^{-1})^n = \underbrace{P T P^{-1} P T P^{-1} \dots P T P^{-1} P T P^{-1}}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow A^n = P T \underbrace{P^{-1} P}_{I} P T P^{-1} \dots P T \underbrace{P^{-1} P}_{I} P T P^{-1} = P T^n P^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^n = P T^n P^{-1}}.$$

* On en déduit :

$$A^n = P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-2n & -1-2n \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit : } A^n = P T^n P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4+4n-2 & 2+4n-2 \\ -4-4n+4 & -2-4n+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+4n & 4n \\ -4n & 2-4n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \boxed{A^n = P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2

Soit le système linéaire (S) de 3 équations à 3 inconnues (x, y, z) :

$$(S) : \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Donner l'écriture matricielle du système (S) sous la forme $AX = B$ en précisant l'expression de A , X et B .

$$(S) \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B, \text{ avec : } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient directement pour la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le déterminant de la matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$\det A = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2).$$

Que pouvez-vous en conclure sur la matrice A et sur le système (S) selon les valeurs de λ ?

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} (1-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

où l'on a factorisé par $(1 - \lambda)$ le déterminant, la dernière ligne faisant apparaître ce facteur commun (cf théorèmes 2, 3 et 5 du cours).

En remplaçant C_3 par $C_3 + C_2$, on a :

$$\det A = (1-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à sa 3ème ligne :

$$\det A = (1-\lambda)(-1)^{3+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(\lambda(1+\lambda)-2) = (\lambda-1)(\lambda+\lambda^2-2).$$

Les racines du polynôme de degré 2 sont : $\begin{cases} \lambda = 1 & (\text{évidente}) \\ \lambda = -2 \end{cases}$.

On trouve la seconde par factorisation ou en calculant le discriminant ($\Delta = 9$).

On en déduit : $\det A = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$.

On constate que **le déterminant de la matrice A est nul pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$** .

=> la matrice A n'est inversible que si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$.

Si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$, alors le système n'admet pas de solution unique.

3. Montrer que ce système est incompatible pour $\lambda = -2$.

Pour $\lambda = -2$, le système s'écrit : $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$.

On remarque qu'en effectuant $L_1 + L_2 + L_3$, on obtient : $0 = 3$, ce qui est impossible.

Donc le système n'admet pas de solution dans ce cas particulier.

On en déduit que le système est incompatible pour $\lambda = -2$.

4. Résoudre ce système pour $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = 1$, on a : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

C'est l'équation d'un plan. Le système admet donc une infinité de solutions dans ce cas.

L'ensemble des solutions peut être noté : $S = \{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

5. Inverser la matrice A pour $\lambda = 2$.

* Pour $\lambda = 2$, la matrice A s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

* Son déterminant vaut : $\det A = (2-1)^2(2+2) = 4 \neq 0$.

* Sa comatrice est : $Com(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

* On en déduit : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (Com(A))^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

* Vérification : $A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. En déduire la solution du système (S) pour $\lambda = 2$.

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \text{ d'où : } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3-2-4 \\ -1+6-4 \\ -1-2+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (S) pour $\lambda = 2$ est : $S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{9}{4} \right) \right\}$.