

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Outils mathématiques pour l'étude de
fonctions de variables réelles

SUJET

On remplace dans l'équation (2), $L(t)$ par son expression trouvée dans la question 2. On montre que la résolution de l'équation (2) conduit à :

$$A(t) = \frac{m}{k} + \frac{m}{b-k} e^{-bt} - m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b-k} \right) e^{-kt}$$

Question n°5 On étudie la fonction $A(t)$ à partir de l'équation (2). On cherche à approcher les valeurs de $A(t)$ au voisinage de l'origine à l'aide d'un développement limité. Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?

- A. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on peut approximer e^{-bt} par $1 + bt$
- B. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 2, on peut approximer e^{-bt} par $1 - bt + bt^2$
- C. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on trouve que $A(t)$ est approximativement nulle
- D. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on trouve que, approximativement, $A(t) = \frac{m}{b-k}$
- E. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on trouve que, approximativement, $A(t) = \frac{m}{k}$

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

La vitesse f de production des levures en fonction de la concentration x du substrat nutritif peut être modélisée par l'équation d'Andrews :

$$f(x) = \frac{qx}{k + x + rx^2} \quad \forall x > 0 \quad \text{équation (1)}$$

où q, r et k sont des constantes réelles strictement positives.

➤ **Question 10**

On considère la fonction f définie par l'équation (1).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$$\forall k > 0, \quad \forall q > 0, \quad \forall r > 0$$

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{k}$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D) $f(x) = \frac{q}{\frac{k}{x} + 1 + rx} \quad \forall x > 0$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 11**

On considère la dérivée de la fonction f' définie par l'équation (1).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$$\forall k > 0, \quad \forall q > 0, \quad \forall r > 0$$

A) Pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$, la fonction f est strictement monotone.

B) Pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$, la fonction f présente un maximum.

C) Pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$, la fonction f présente un minimum.

D) $f'\left(\sqrt{\frac{k}{r}}\right) = 0$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On s'intéresse à un principe actif. Les questions 10 et 11 concernent son rendement de production, la question 12 sa préparation et les questions 13 à 15 la concentration de deux de ses isomères.

➤ **Question 10**

Le rendement (noté r) de production du principe actif dépend de deux variables p_1 et p_2 selon la fonction :

$$r(p_1, p_2) = 18p_1 + 4p_2 - 3p_1^2 - 2p_2^2 + 2p_1p_2$$

avec p_1 et p_2 des variables réelles strictement positives telles que $r(p_1, p_2) > 0$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$\forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ tel que $r(p_1, p_2) > 0$,

A) La dérivée seconde $\frac{\partial^2 r(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} = -6$

B) La dérivée seconde $\frac{\partial^2 r(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} = (18 - 6p_1 + 2p_2)^2$

C) Le couple de valeurs $(p_1, p_2) = (3, 1)$ annule les dérivées premières $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_2}$

D) Le couple de valeurs $(p_1, p_2) = (4, 3)$ annule les dérivées premières $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_2}$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Pour mieux dépister l'insuffisance rénale chez l'adulte, on évalue son débit de filtration glomérulaire DFG (noté Z). Pour chaque individu, cette grandeur est fonction de sa concentration en créatinine sérique (noté S), de son genre (homme, femme), de son âge (noté A) et de son origine ethnique. Dans tout cet exercice nous traiterons de données obtenues chez des femmes de type ethnique « caucasien ». Dans la première partie, on dispose de données provenant de femmes, du même âge. Dans la deuxième partie, l'âge sera considéré comme variable.

Première Partie :

Pour des femmes caucasiennes du même âge on peut écrire :

$$Z = K \times (0,011 S)^{\alpha} \quad (\text{équation 1})$$

Les valeurs obtenues pour K et α sont exprimées sans unité, Z est exprimé en $\text{mL} \cdot \text{min}^{-1}$, S est exprimé en $\mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Deuxième Partie :

Dans le modèle complet, K est une fonction de l'âge A : $K = 130 \times A^{-0,2}$ où A est exprimé en années.

L'équation 1 devient : $Z = 130(0,011 S)^{\alpha} A^{-0,2}$ (équation 2)

Cette équation sera utilisée pour traiter les deux questions suivantes.

➤ Question 14

On cherche la variation dZ de Z pour une variation dA de l'âge, la concentration S étant considérée comme constante. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $dZ = 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-0,2} dA$
- B) $dZ = -130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-1,2} dA$
- C) $dZ = 130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{1,2} dA$
- D) $dZ = -130(\alpha - 1)(0,011 S)^{\alpha-1} A^{-1,2} dA$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On peut dans certaines situations, modéliser, dans un milieu biologique, l'évolution (notée y) de la concentration des levures, en fonction de la concentration (notée x) en fructose, selon l'équation d'Andrews :

$$y = f(x) = \frac{A x}{K + B x + x^2} \quad \text{où } A, B \text{ et } K \text{ sont des constantes réelles strictement positives}$$

Pour toutes les questions on se limitera au domaine $x \in \mathbb{R}^{+*}$

➤ **Question 10**

On étudie la fonction $f(x)$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La condition $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et les conditions sur les constantes B et K permettent d'affirmer que $K + B x + x^2$ ne s'annule jamais.
- B) La fonction $f(x)$ est toujours croissante en fonction de x
- C) La fonction $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$
- D) La fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 11**

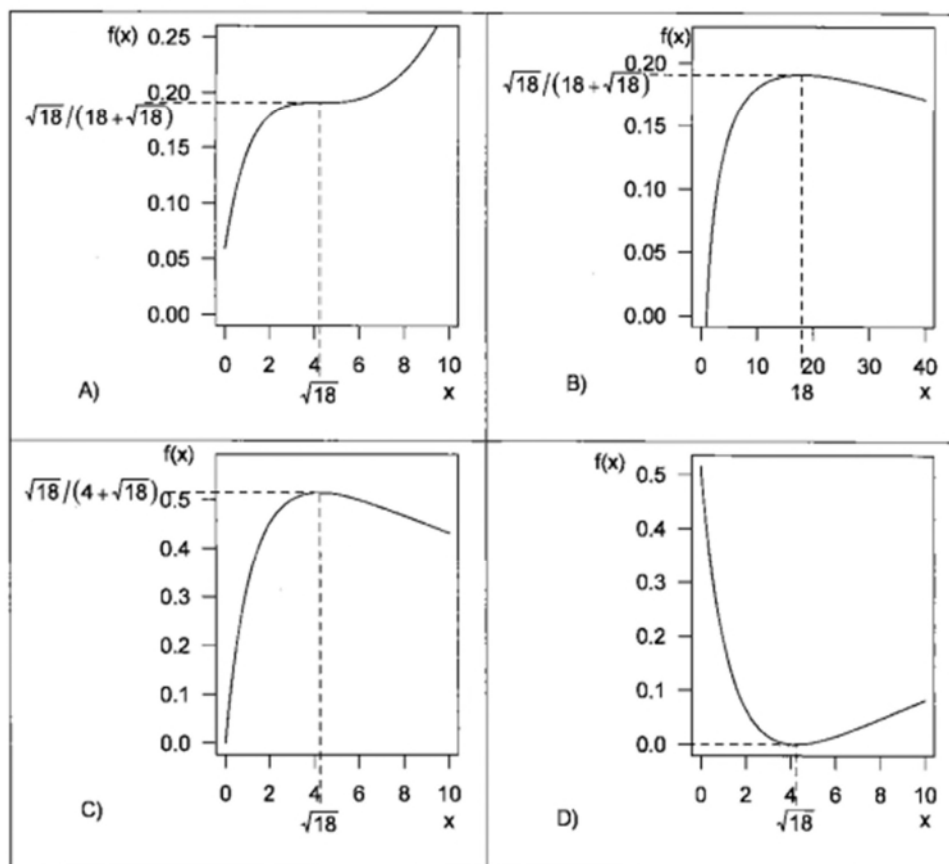
On étudie la fonction $f(x)$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La dérivée $f'(x)$ s'annule en changeant de signe à $x = \sqrt{K}$
- B) La fonction $f(x)$ présente un maximum à $x = K$
- C) La fonction $f(x)$ présente un minimum à $x = \sqrt{K}$
- D) La fonction $f(x)$ présente un point d'inflexion à $x = \sqrt{K}$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 12

On pose $A=9$, $B=9$ et $K=18$ (en unités arbitraires) et on étudie le graphe de $f(x)$. On donne les graphes suivants :



Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) Le graphe A représente la fonction $f(x)$
- B) Le graphe B représente la fonction $f(x)$
- C) Le graphe C représente la fonction $f(x)$
- D) Le graphe D représente la fonction $f(x)$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 5 (Questions 24 à 28)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{si } x \notin [-a, a] \end{cases}$$

et la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}x + c & \text{si } x \in [-a, 0[\\ c & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x \notin [-a, a] \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $c \in \mathbb{R}^{+*}$.

Quand f est une densité de probabilité, on note X_1 la variable aléatoire associée à f . Quand g est une densité de probabilité, on note X_2 la variable aléatoire associée à g .

➤ **Question 24**

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $f(x)$ est toujours une densité de probabilité.
- B) Si $b = \frac{1}{a}$, $f(x)$ est une densité de probabilité.
- C) Si $b = \frac{1}{2a}$, $f(x)$ est une densité de probabilité.
- D) $f(x)$ est toujours une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- E) $f(x)$ est toujours une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

➤ **Question 25**

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $g(x)$ est toujours une densité de probabilité.
- B) Si $c = \frac{1}{3a}$, $g(x)$ est une densité de probabilité.
- C) Si $c = \frac{2}{3a}$, $g(x)$ est une densité de probabilité.
- D) $g(x)$ est toujours une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- E) $g(x)$ est toujours une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Questions 13 à 18)

Cet exercice se rapporte à l'étude de la croissance microbienne.

Cette croissance est caractérisée soit par l'évolution, au cours du temps t , de la masse des micro-organismes par unité de volume ou biomasse, notée $B(t)$, soit par le taux de croissance, toujours strictement positif, noté θ .

A partir de la question 14, on propose des modélisations du taux de croissance θ . Celui-ci sera d'abord considéré comme une constante (question 14), puis comme une fonction de la concentration S en substrat nutritif (questions 15 à 18).

S et B s'expriment tous deux en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, le temps s s'exprime en minutes (min).

➤ Question 15

L'examen des données expérimentales montre que le modèle précédent pour θ , est trop simple : θ est fonction de la concentration S en substrat nutritif. De plus pour certains microorganismes on trouve que pour S élevé, la croissance est inhibée et la biomasse décroît. Pour ces microorganismes l'expression suivante de $\theta(S)$ est proposée :

$$\theta(S) = \theta_m \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{S} + \frac{S}{\beta}} \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \theta_m \text{ sont des réels strictement positifs. Ce modèle sera}$$

appelé modèle d'inhibition.

Sur le graphe de la fonction $\theta(S)$ on note l'existence d'un point d'inflexion dans la phase de décroissance qui est confirmé sur le graphe des données expérimentales.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) Une réécriture de $\theta(S)$ est $\theta(S) = \theta_m \frac{\beta S}{\alpha \beta + \beta S + S^2}$

B) La dérivée de θ par rapport à S vaut $\frac{\theta_m (\beta^2 \alpha - \beta S^2)}{(\alpha \beta + \beta S + S^2)^2}$

C) Si ce modèle est correct on s'attend à trouver sur le graphe de la fonction $\theta(S)$ un minimum en l'abscisse $S = \sqrt{\alpha \beta}$.

D) Si ce modèle est correct on s'attend à trouver sur le graphe de la fonction $\theta(S)$ un maximum en l'abscisse $S = \sqrt{\alpha \beta}$.

E) Au point d'inflexion lors de la phase de décroissance, la concavité de la courbe change.

2021 Session 2

Exercice 1

Un médicament est administré par voie orale en une seule prise. Dans le cadre de cet exercice, on considérera que ce médicament passe par le système digestif puis dans le sang et est éliminé par filtration rénale comme illustré sur le graphique ci-dessous.

La vitesse d'absorption est proportionnelle à la concentration de médicament présente dans le système digestif avec un coefficient de proportionnalité égal à k_a (exprimé en h^{-1}). La vitesse d'élimination est proportionnelle à la concentration présente dans le sang avec un coefficient de proportionnalité égal à k_e (exprimé en h^{-1}).

$x(t)$ est la concentration de médicament dans le système digestif en fonction du temps t et $y(t)$ est la concentration de médicament dans le sang en fonction du temps t . En $t = 0$, la concentration de médicament dans le système digestif vaut w mg/L et est nulle dans le sang.

Les paramètres w , k_a et k_e sont strictement positifs avec $k_a > k_e$. Le temps t (en heures) est positif ou nul.



On note l'équation (1) celle modélisant l'évolution de la concentration de médicament dans le système digestif et l'équation (2) celle modélisant l'évolution de la concentration de médicament dans le sang.

Question n°3 Pour cette question, on fixe $w = 2$ mg/L, $k_a = 3 \text{ h}^{-1}$ et $k_e = 1 \text{ h}^{-1}$. La fonction $y(t)$ vaut dans ce cas :

$$y(t) = 3(e^{-t} - e^{-3t})$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Le temps pour atteindre la concentration maximale de médicament dans le sang est inférieur à 45 minutes
- B. Le temps pour atteindre la concentration maximale de médicament dans le sang est supérieur à 15 minutes
- C. La valeur de la concentration maximale de médicament dans le sang est inférieure à 3 mg/L
- D. $y'(t) = 3e^{-t}(3e^{-2t} + 1)$
- E. Au moment où la concentration de médicament dans le sang est maximale, la concentration dans le système digestif est strictement positive