

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Applications du calcul intégral,
des équations différentielles
et des fonctions de plusieurs variables

SUJET

Exercice 1

On étudie la population de bactéries qui évolue au cours du temps. Le temps t en jour est positif ou nul. Le nombre de bactéries est exprimé en UFC/L (Unité Formant Colonie par Litre). Ce nombre en fonction du temps est noté $y(t)$.

On le mesure tous les jours pendant 5 jours et on obtient les résultats donnés dans le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1

t (jour)	0	1	2	3	4	5
$y(t)$ (UFC/L)	100	160	270	440	730	1200

Question n°1 À partir des mesures expérimentales présentées dans le tableau 1, on utilise la méthode des trapèzes pour estimer l'aire sous la courbe (aire notée AUC_1) du nombre $y(t)$ entre les temps $t = 0$ jour et $t = 5$ jours.

Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte?

L'approximation de AUC_1 (en jour.UFC/L) par la méthode des trapèzes est :

- A. $\frac{1}{2}(100 + 1200)$
- B. $(100 + 160 + 270 + 440 + 730 + 1200)$
- C. 2250
- D. 1125
- E. $\left(\frac{100+160+270+440+730+1200}{2}\right)$

On modélise l'évolution de $y(t)$ par l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = ky(t) \quad \text{Equation différentielle (1)}$$

où $k = 0,5 \text{ jour}^{-1}$ et $y(0) = 100 \text{ UFC/L}$.

Question n°3 On considère que k est connu avec une incertitude $\Delta k = 0,1 \text{ jour}^{-1}$. À partir de la solution de l'équation différentielle (1), on estime l'incertitude sur $y(5)$.

Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte?

- A. $\Delta y(5) \approx 5000e^{5/2} \text{ UFC/L}$
- B. $\Delta y(5) \approx 500e^{5/2} \text{ UFC/L}$
- C. $\Delta y(5) \approx 50e^{5/2} \text{ UFC/L}$
- D. $\Delta y(5) \approx 5e^{5/2} \text{ UFC/L}$
- E. $\Delta y(5) \approx 0,5e^{5/2} \text{ UFC/L}$

Exercice 1

Des valeurs faibles de la concentration corpusculaire moyenne en hémoglobine (CCMH, mesurée en g/dL) peuvent permettre de détecter une anémie avec carence en fer. Le traitement classique est une supplémentation S en fer. Le temps $t = 0$ correspond au début de ce traitement S et on note $y(t)$ la différence de CCMH entre celle mesurée au temps t et celle mesurée en $t = 0$. Le temps t (en jour) est positif ou nul et $y(0) = 0$. $y(t)$ évolue selon l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = k \left(a - \frac{y(t)}{2} \right) \quad \text{Equation différentielle (1)}$$

où k et a sont des constantes réelles strictement positives, l'unité de la constante a est g/dL.

Pour les questions 4 et 5, on considère l'équation différentielle (3) qui est un cas particulier de l'équation différentielle (1) :

$$y_1'(t) = \left(a - \frac{y_1(t)}{2} \right) \quad \text{Equation différentielle (3)}$$

où a est une constante réelle strictement positive, l'unité de la constante a est g/dL.

On note $I = \int_0^{15} y_1(t) dt$. On dispose de six mesures de $y_1(t)$ pour six temps différents t :

t (jour)	0	3	6	9	12	15
$y_1(t)$ (g/dL)	0	3,1	3,8	3,9	4,0	4,0

Question n°4 On s'intéresse à l'approximation de I par la méthode des trapèzes. Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte?

- A. L'approximation de I par la méthode des trapèzes est $3\left(\frac{3,1}{2} + 3,8 + 3,9 + 4 + 2\right)$ g.jour/dL
- B. L'approximation de I par la méthode des trapèzes est $3(3,1 + 3,8 + 3,9 + 4 + 2)$ g.jour/dL
- C. L'approximation de I par la méthode des trapèzes est $3\left(\frac{3,1}{2} + 3,8 + 3,9 + 4\right)$ g.jour/dL
- D. L'approximation de I par la méthode des trapèzes est $(3,1 + 3,8 + 3,9 + 4 + 2)$ g.jour/dL
- E. L'approximation de I par la méthode des trapèzes est $\frac{1}{3}(3,1 + 3,8 + 3,9 + 4 + 2)$ g.jour/dL

Question n°5 On s'intéresse à I et à son approximation par la méthode des trapèzes. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. I est la valeur moyenne de $y_1(t)$ sur l'intervalle de temps $[0 ; 15]$ jours
- B. L'approximation de la valeur moyenne de $y_1(t)$ sur l'intervalle de temps $[0 ; 15]$ jours par la méthode des trapèzes est 3,4 g.jour/dL (à 0,1 g.jour/dL près)
- C. $I = 2a(13 - 2e^{-7,5})$ g.jour/dL
- D. En utilisant l'approximation de I par la méthode des trapèzes, l'approximation de a vaut 1,9 (g/dL) (à 0,1 g/dL près)
- E. I augmente quand a augmente

2021

Exercice 1

On étudie l'évolution au cours du temps, d'une population de parasites qui infestent le tube digestif de certains mammifères. Cette population est structurée en deux classes d'âge : les larves L et les adultes A . Le nombre de larves au temps t est décrit par la fonction $L(t)$, le nombre d'adultes au temps t est décrit par la fonction $A(t)$ et le temps t (en jours) est positif ou nul.

Question n°3 La valeur moyenne de $L(t)$ sur l'intervalle de temps $[0 ; 4]$ jours est fonction de l'aire sous la courbe délimitée par l'axe des temps t , la courbe représentative de $L(t)$ et les droites verticales $t = 0$ et $t = 4$ jours.

Cette valeur moyenne est approximée par L_{moy} où, dans son calcul, l'aire sous la courbe est approchée par la méthode des trapèzes avec un pas de décomposition de $t = 1$ jour.

Pour cela, on dispose des mesures suivantes de $L(t)$:

t (jours)	0	1	2	3	4
$L(t)$ (nombre de larves)	0	405	650	800	850

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?

- A. L_{moy} vaut 340 larves (à 5 larves près)
- B. L_{moy} vaut 460 larves (à 5 larves près)
- C. L_{moy} vaut 540 larves (à 5 larves près)
- D. L_{moy} vaut 570 larves (à 5 larves près)
- E. L_{moy} vaut 680 larves (à 5 larves près)

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On s'intéresse à un principe actif. Les questions 10 et 11 concernent son rendement de production, la question 12 sa préparation et les questions 13 à 15 la concentration de deux de ses isomères.

➤ **Question 10**

Le rendement (noté r) de production du principe actif dépend de deux variables p_1 et p_2 selon la fonction :

$$r(p_1, p_2) = 18p_1 + 4p_2 - 3p_1^2 - 2p_2^2 + 2p_1p_2$$

avec p_1 et p_2 des variables réelles strictement positives telles que $r(p_1, p_2) > 0$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$\forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ tel que $r(p_1, p_2) > 0$,

A) La dérivée seconde $\frac{\partial^2 r(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} = -6$

B) La dérivée seconde $\frac{\partial^2 r(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} = (18 - 6p_1 + 2p_2)^2$

C) Le couple de valeurs $(p_1, p_2) = (3, 1)$ annule les dérivées premières $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_2}$

D) Le couple de valeurs $(p_1, p_2) = (4, 3)$ annule les dérivées premières $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial r(p_1, p_2)}{\partial p_2}$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 11

On étudie la présence éventuelle d'extrema de la fonction $r(p_1, p_2)$ de la question 10. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) Cette fonction présente r un point-selle.
- B) Cette fonction présente r un extremum.
- C) La condition $\frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{\partial r}{\partial p_2} = 0$ est nécessaire pour conclure à la présence d'un extremum.
- D) La condition $\frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{\partial r}{\partial p_2} = 0$ est suffisante pour conclure à la présence d'un extremum.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 12

Une solution du principe actif de concentration finale C_f est préparée à partir d'une solution mère de concentration C_1 .

C_f dépend de la concentration C_1 et de quatre volumes V_1, V_2, V_3, V_4 :

$$C_f = \frac{C_1 V_1 V_2}{V_3 V_4}$$

où les grandeurs C_1, V_1, V_2, V_3, V_4 sont des réels strictement positifs. Les concentrations sont exprimées en mole par litre (M) et les volumes en millilitre (mL). Les volumes V_1, V_2, V_3 et V_4 sont mesurés avec des incertitudes absolues $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$ et ΔV_4 . On considère l'incertitude absolue ΔC_1 comme nulle.

On souhaite approcher la borne maximale de l'incertitude relative $\frac{\Delta C_f}{C_f}$ et absolue

ΔC_f en fonction de $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$ et ΔV_4 . Par convention, les incertitudes absolues et relatives sont toujours exprimées comme positives.

Application numérique : $C_1 = 1 \text{ M}$, $V_1 = 1 \text{ mL}$, $V_2 = 2 \text{ mL}$, $V_3 = 5 \text{ mL}$, $V_4 = 20 \text{ mL}$, $\Delta V_1 = 0,005 \text{ mL}$, $\Delta V_2 = 0,004 \text{ mL}$, $\Delta V_3 = 0,005 \text{ mL}$ et $\Delta V_4 = 0,04 \text{ mL}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $\frac{\Delta C_f}{C_f} \leq \frac{\Delta V_1}{V_1} + \frac{\Delta V_2}{V_2} - \frac{\Delta V_3}{V_3} - \frac{\Delta V_4}{V_4}$
- B) $\frac{\Delta C_f}{C_f} \leq \frac{\Delta V_1}{V_1} + \frac{\Delta V_2}{V_2} + \frac{\Delta V_3}{V_3} + \frac{\Delta V_4}{V_4}$
- C) $\Delta C_f \leq 0,0002 \text{ M}$
- D) $\Delta C_f \leq 0,00008 \text{ M}$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 13

On s'intéresse maintenant à l'équilibre entre deux isomères du principe actif de concentrations respectives $x(t)$ et $y(t)$. Ces concentrations sont exprimées en mole par litre (M) et le temps en seconde (s). En considérant des cinétiques de 1^{er} ordre, on peut écrire le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 3y(t) & \forall t > 0 \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$\forall t > 0$,

- A) $x''(t) + 5x'(t) = 0$
- B) $x''(t) + 2x'(t) = 3y(t)$
- C) $x''(t) - 4x'(t) = -9y'(t)$
- D) $x''(t) + 2x'(t) = 3x(t)$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 14

On résout le système de la question 13. Les conditions initiales sont $x(0) = 5 \text{ M}$ et $y(0) = 0 \text{ M}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) Les solutions générales sont $x(t) = Ae^t + Be^{-2t}$ et $y(t) = Ae^t$ avec A et B des constantes réelles.
- B) Les solutions générales sont $x(t) = A + Be^{-5t}$ et $y(t) = \frac{2A}{3} - Be^{-5t}$ avec A et B des constantes réelles.
- C) Les solutions prenant en compte les conditions initiales sont $x(t) = 3 + 2e^{-5t}$ et $y(t) = 2 - 2e^{-5t}$
- D) Les solutions prenant en compte les conditions initiales sont $x(t) = 5e^{-2t}$ et $y(t) = 0$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 15

On souhaite utiliser la solution trouvée à la question 14 prenant en compte les conditions initiales pour calculer la valeur moyenne (notée m) de $x(t)$ entre $t = 0$ s et $t = 10$ s.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $m = \int_0^{10} x(t) dt$
- B) $m = \frac{1}{10} \int_0^{10} x(t) dt$
- C) $m = \frac{1}{25} (76 - e^{-50})$
- D) $m = \frac{1}{4} (1 + e^{-20})$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

2018

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

➤ Question 15

Le taux de conversion x du réactif est une fonction de trois paramètres réels strictement positifs k, v et q . Cette fonction est définie par :

$$x(k, v, q) = \frac{kv}{q + kv}$$

Les paramètres k, v et q sont connus avec des incertitudes $\Delta k, \Delta v$ et Δq . On souhaite approcher la borne maximale de l'incertitude Δx en fonction de $\Delta k, \Delta v$ et Δq . Par convention, les incertitudes sont toujours exprimées comme positives. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $\Delta x \leq \frac{qv}{(q+kv)^2} \Delta k + \frac{kq}{(q+kv)^2} \Delta v + \frac{kv}{(q+kv)^2} \Delta q$
- B) $\Delta x \leq \left(-\frac{kv^2}{(q+kv)^2} + \frac{v}{q+kv} \right) \Delta k + \left(-\frac{k^2v}{(q+kv)^2} + \frac{k}{q+kv} \right) \Delta v + \left(\frac{kv}{(q+kv)^2} \right) \Delta q$
- C) $\Delta x \leq \left| -\frac{kv^2}{(q+kv)^2} + \frac{v}{q+kv} \right| \Delta k + \left| -\frac{k^2v}{(q+kv)^2} + \frac{k}{q+kv} \right| \Delta v + \left| \frac{kv}{(q+kv)^2} \right| \Delta q$
- D) $\Delta x \leq \left| \frac{kv^2}{(q+kv)^2} - \frac{v}{q+kv} \right| \Delta k + \left| \frac{k^2v}{(q+kv)^2} - \frac{k}{q+kv} \right| \Delta v + \left| -\frac{kv}{(q+kv)^2} \right| \Delta q$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Dans cet exercice, on étudie deux modèles de dissolution de comprimés : les questions 10 à 12 concernent le modèle de Weibull et les questions 13 à 15 celui de Korsmeyer-Peppas.

Dans les deux cas, on s'intéresse à la fraction de comprimé dissoute en un temps donné. La fonction qui décrit cette fraction dissoute sera notée f pour le premier modèle (questions 10 à 12) et g pour le deuxième modèle (questions 13 à 15).

Dans les deux cas, on considère uniquement des temps positifs. La mesure de la dissolution du comprimé commence en $t = 0$ quand celui-ci est introduit avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. De plus, les fonctions f et g sont continues à droite en $t = 0$.

➤ Question 12

Sans connaître les valeurs des constantes a et b , on désire approcher l'aire I sous la courbe f (solution de la question 10) pour $t \in [0 ; 20]$:

$$I = \int_0^{20} f(t) dt$$

Pour cela, on a mesuré expérimentalement la fraction dissoute $f(t)$ pour cinq temps différents t . La fraction dissoute $f(t)$ est sans unité, le temps t est exprimé en minutes.

t (min)	0	5	10	15	20
$f(t)$	0	0,45	0,70	0,83	0,91

On obtient par la méthode des trapèzes une approximation A_T de cette aire I .

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) L'approximation de I par la méthode des trapèzes est :

$$A_T = \frac{5}{2} (2(0,45 + 0,70 + 0,83) + 0,91)$$

B) L'approximation de I par la méthode des trapèzes est :

$$A_T = \frac{5}{2} (0,45 + 0,70 + 0,83 + 2 \times 0,91)$$

C) L'aire I est exprimée sans unité.

D) L'aire I est exprimée en minutes.

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 15

Sous certaines conditions, le coefficient k de l'expression $g(t) = kt'$ du modèle de Korsmeyer-Peppas est considéré comme une fonction de deux paramètres réels strictement positifs s et c :

$$k(s, c) = \frac{2\sqrt{s}}{c}$$

Les paramètres s et c sont mesurés expérimentalement avec des incertitudes Δs et Δc . On cherche à approcher la borne maximale de l'incertitude Δk en fonction de Δs et Δc . Par convention, les incertitudes sont toujours exprimées comme positives.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) $\Delta k \leq \frac{1}{c\sqrt{s}} \Delta s - \frac{2\sqrt{s}}{c^2} \Delta c$

B) $\Delta k \leq \frac{1}{c\sqrt{s}} \Delta s + \frac{2\sqrt{s}}{c^2} \Delta c$

C) $\Delta k \leq \frac{1}{c\sqrt{s}} \Delta s + \frac{\sqrt{s}}{c^2} \Delta c$

D) $\Delta k \leq \frac{1}{2c\sqrt{s}} \Delta s + \frac{2\sqrt{s}}{c^2} \Delta c$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On souhaite élaborer un modèle simplifié de l'équilibre entre les formes dimérique et monomérique d'une protéase de rétrovirus.

Dans un premier temps, on étudie la dissociation du dimère D vers deux monomères M, selon la réaction : $D \rightarrow 2M$

On note $y(t)$ la concentration en fonction du temps t du monomère M. Au cours de la réaction, cette concentration $y(t)$ du monomère M évolue selon l'équation différentielle 1 :

$$\text{Équation différentielle 1} \quad y'(t) = k_1 \left(3 - \frac{y(t)}{2} \right)$$

où k_1 est une constante réelle strictement positive et la valeur 3 correspond à la concentration initiale en $t = 0$ du dimère D.

➤ Question 13

Nous avons obtenu cinq mesures de la concentration $y(t)$ pour cinq temps différents t :

t	0	3	6	9	12
$y(t)$	0	0,8	1,0	1,2	1,3

Nous appliquons la méthode des trapèzes pour estimer l'intégrale

$$I = \int_0^{12} y(t) dt.$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) En appliquant la méthode des trapèzes, $I \approx 3 \left(2 \times 3 + 2 \times 6 + 2 \times 9 + \frac{12}{2} \right)$.
- B) En appliquant la méthode des trapèzes, $I \approx \frac{3}{2} (2 \times 0,8 + 2 \times 1,0 + 2 \times 1,2 + 1,3)$.
- C) En appliquant la méthode des trapèzes, $I \approx 3 \left(0,8 + 1,0 + 1,2 + \frac{1,3}{2} \right)$.
- D) En appliquant la méthode des trapèzes, $I \approx \frac{3}{2} (2 \times 3 + 2 \times 6 + 2 \times 9 + 12)$.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Les questions 12 à 15 concernent l'étude de l'évolution des populations de deux espèces en symbiose. Les effectifs des deux espèces en fonction du temps sont notés $z(t)$ et $y(t)$. Ces effectifs sont modélisés par le système d'équations suivant :

$$\text{système n° 1} \quad \begin{cases} z'(t) = -2z(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2z(t) + y(t) \end{cases}$$

Au cours de la résolution de ce système on obtient l'équation suivante :

$$\text{équation n°1} \quad z''(t) + z'(t) - 6z(t) = 0$$

➤ **Question 12**

On s'intéresse à (t) . Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) L'expression $z(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$ (avec A et B constantes réelles) est solution de l'équation n° 1
- B) Une équation caractéristique de l'équation n° 1 est $r^2 + r - 6t = 0$, où r est un nombre complexe
- C) L'expression $z(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ (avec A et B constantes réelles) est solution de l'équation n° 1
- D) Une équation caractéristique de l'équation n° 1 est $r^2 + r - 6 = 0$, où r est un nombre complexe
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 13**

On s'intéresse à $z(t)$ et à $y(t)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $z(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$ et $y(t) = -3Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$ forment un couple solution du système n° 1
- B) $z(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$ et $y(t) = -\frac{1}{2}Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$ forment un couple solution du système n° 1
- C) $z(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ et $y(t) = \frac{5}{2}Ae^{3t}$ forment un couple solution du système n° 1
- D) $z(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ et $y(t) = -2Ae^{3t} + 3Be^{-2t}$ forment un couple solution du système n° 1
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 14

On applique aux effectifs $z(t)$ et $y(t)$, couple de solution du système n°1, les conditions initiales $z(0) = y(0) = 5$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $z(t) = 2e^{-3t} + 3e^{2t}$
- B) $z(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t}$
- C) $y(t) = -e^{-3t} + 6e^{2t}$
- D) $y(t) = 2e^{3t}$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 15

En utilisant l'expression de $y(t)$ du couple $(z(t), y(t))$ solution du système n°1 et satisfaisant aux conditions initiales de la question 14, on cherche à calculer l'effectif moyen y_{moy} de la seconde espèce entre $t = 0$ et $t = 2$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $y_{\text{moy}} = \int_0^2 ty(t)dt$
- B) $y_{\text{moy}} = -\frac{5}{3} + \frac{1}{6}e^{-6} + \frac{3}{2}e^4$
- C) $y_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \int_0^2 y(t)dt$
- D) $y_{\text{moy}} = \frac{25}{8} + \frac{7}{9}e^{-6} + \frac{9}{2}e^4$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Pour mieux dépister l'insuffisance rénale chez l'adulte, on évalue son débit de filtration glomérulaire DFG (noté Z). Pour chaque individu, cette grandeur est fonction de sa concentration en créatinine sérique (noté S), de son genre (homme, femme), de son âge (noté A) et de son origine ethnique. Dans tout cet exercice nous traiterons de données obtenues chez des femmes de type ethnique « caucasien ». Dans la première partie, on dispose de données provenant de femmes, du même âge. Dans la deuxième partie, l'âge sera considéré comme variable.

Deuxième Partie :

Dans le modèle complet, K est une fonction de l'âge A : $K = 130 \times A^{-0,2}$ où A est exprimé en années.

L'équation 1 devient : $Z = 130(0,011 S)^{\alpha} A^{-0,2}$ (équation 2)

Cette équation sera utilisée pour traiter les deux questions suivantes.

➤ Question 14

On cherche la variation dZ de Z pour une variation dA de l'âge, la concentration S étant considérée comme constante. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $dZ = 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-0,2} dA$
- B) $dZ = -130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-1,2} dA$
- C) $dZ = 130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{1,2} dA$
- D) $dZ = -130(\alpha - 1)(0,011 S)^{\alpha-1} A^{-1,2} dA$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte

➤ Question 15

On connaît l'âge A avec une incertitude ΔA et la concentration de créatinine sérique S avec une incertitude ΔS . On cherche l'incertitude ΔZ de Z en fonction de ΔA et de ΔS . Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $\Delta Z \leq 130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-0,2} \Delta A + 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-1,2} \Delta S$
- B) $\Delta Z \leq 130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-1,2} \Delta A + 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-0,2} \Delta S$
- C) $\Delta Z \leq 130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-1,2} \Delta A + 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-0,2} \Delta S$
- D) $\Delta Z \leq -130 \times 0,2 (0,011 S)^{\alpha} A^{-1,2} \Delta A + 130\alpha (0,011 S)^{\alpha-1} A^{-0,2} \Delta S$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On peut dans certaines situations, modéliser, dans un milieu biologique, l'évolution (notée y) de la concentration des levures, en fonction de la concentration (notée x) en fructose, selon l'équation d'Andrews :

$$y = f(x) = \frac{A x}{K + B x + x^2} \quad \text{où } A, B \text{ et } K \text{ sont des constantes réelles strictement positives}$$

Pour toutes les questions on se limitera au domaine $x \in \mathbb{R}^{+*}$

➤ **Question 15**

Pour une valeur donnée de x , supposée connue sans incertitude, on évalue l'erreur commise en y quand les paramètres A et K sont connus avec des incertitudes ΔA et ΔK ; la constante B est supposée connue sans incertitude. On considère alors la fonction de deux variables :

$$y = g(A, K) = \frac{A x}{K + B x + x^2}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) Pour rechercher un extremum de la fonction $g(A, K)$ il suffit d'annuler ses deux dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial A}$ et $\frac{\partial g}{\partial K}$.

B) La différentielle logarithmique de cette fonction est :

$$d \ln g = \frac{x}{A} dA + \frac{A x}{K + B x + x^2} dK$$

C) L'incertitude relative sur g , due aux incertitudes sur A et K , est donnée par l'expression :

$$\frac{\Delta g}{g} \leq \frac{1}{A} \Delta A + \frac{1}{K + B x + x^2} \Delta K$$

D) L'incertitude sur g , due aux incertitudes sur A et K , est donnée par l'expression :

$$\Delta g = g \Delta \ln g$$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 3 (Questions 13 à 18)

L'étude de stabilité et le test de dissolution sont deux procédures qui permettent de caractériser un médicament sous forme de comprimé et feront l'objet de cet exercice. Ces études reposent sur des méthodes analytiques spécifiques de la molécule active. Les études de stabilité (questions 13, 14, 15, 16 et 17) ont pour but de déterminer le délai pendant lequel le comprimé pourra être utilisé avec efficacité et sécurité. Les tests de dissolution (question 18) permettent de mesurer l'aptitude du comprimé à laisser passer en solution la molécule active.

➤ **Question 17 : On étudie l'erreur sur la détermination de la constante de dégradation k .**

Celle-ci varie avec la température suivant l'équation d'Arrhenius :

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

avec E_a l'énergie d'activation, T la température (en K) et R la constante des gaz parfaits.

Nous avons estimé l'énergie d'activation E_a et le coefficient A de l'équation d'Arrhenius ainsi que les incertitudes ΔE_a et ΔA . On souhaite estimer l'incertitude Δk sur le calcul de la constante k à une température $T=298$ K.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) $\Delta k = \frac{A E_a}{R T^2} e^{-\frac{E_a}{RT}} \Delta T$

B) $\Delta k \leq \left| e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta E_a + \left| -\frac{A}{R T} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta A$

C) $\Delta k \leq -\frac{A}{R T} e^{-\frac{E_a}{RT}} \Delta E_a + e^{-\frac{E_a}{RT}} \Delta A + \frac{A E_a}{R T^2} e^{-\frac{E_a}{RT}} \Delta T$

D) $\Delta k \leq \left| -\frac{A}{R T} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta E_a + \left| e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta A$

E) $\Delta k \leq \left| \frac{A E_a}{R T^2} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta E_a + \left| e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta A + \left| -\frac{A}{R T} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right| \Delta T$

Exercice 3 (Questions 13 à 18)

Cet exercice se rapporte à l'étude de la croissance microbienne.

Cette croissance est caractérisée soit par l'évolution, au cours du temps t , de la masse des micro-organismes par unité de volume ou biomasse, notée $B(t)$, soit par le taux de croissance, toujours strictement positif, noté θ .

A partir de la question 14, on propose des modélisations du taux de croissance θ . Celui-ci sera d'abord considéré comme une constante (question 14), puis comme une fonction de la concentration S en substrat nutritif (questions 15 à 18).

S et B s'expriment tous deux en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, le temps s s'exprime en minutes (min).

➤ Question 13

Dans l'étape de recherche d'antibiotique actif sur les germes, l'intégrale de la biomasse obtenue sur un intervalle de temps $[t_0, t_0 + 30]$ est utile à connaître (t_0 est une origine de temps quelconque). On souhaite évaluer cette intégrale $\int_{t_0}^{t_0+30} B(u)du$ par intégration numérique, en utilisant la méthode des trapèzes. Pour une souche donnée de microorganismes, on dispose de mesures de la biomasse B en fonction du temps.

Temps en min	t_0	$t_0 + 10$	$t_0 + 20$	$t_0 + 30$
B en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$	0,006	0,008	0,010	0,014

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exactes ?

- A) Dans la méthode des trapèzes, on approxime, par un segment de droite, la fonction étudiée entre deux points expérimentaux successifs du tableau de mesures.
- B) La méthode des trapèzes est en général moins précise, par rapport à l'intégrale analytique, que la méthode des rectangles.
- C) Si la courbe représentant la fonction est convexe (concavité tournée vers le haut), l'intégrale numérique obtenue par la méthode des trapèzes est inférieure à l'intégrale analytique.
- D) On utilise les valeurs mesurées entre les temps t_0 et $t_0 + 30$, pour les quatre temps du tableau des mesures. L'approximation numérique de $\int_{t_0}^{t_0+30} B(u)du$ donne $0,28 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}$.
- E) On utilise les valeurs mesurées entre les temps t_0 et $t_0 + 30$, pour les quatre temps du tableau des mesures. L'approximation numérique de $\int_{t_0}^{t_0+30} B(u)du$ donne $0,38 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}$.

➤ Question 18

Les valeurs S , θ_m et β sont connues avec des incertitudes ΔS , $\Delta\theta_m$ et $\Delta\beta$. A l'aide de l'équation $\theta(S) = \theta_m \frac{1}{1 + \frac{S}{\beta}}$ on cherche une estimation de la propagation de ces incertitudes sur l'incertitude $\Delta\theta$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) θ_m et β sont des constantes, et leurs incertitudes n'interviennent pas dans le calcul de $\Delta\theta$.
- B) Il suffit de calculer la dérivée $\frac{d\theta(S)}{dS}$ de la fonction d'une variable $\theta(S)$.
- C) Le calcul utilise la différentielle totale de la fonction des trois variables $\theta(S, \theta_m, \beta)$.
- D) Il faut d'abord calculer la différence entre deux valeurs de θ : l'une calculée avec les valeurs minimales de S , θ_m et β , et l'autre calculée avec leurs valeurs maximales.
- E) Le calcul différentiel conduit à une majoration de l'incertitude.

2021 Session 2

Exercice 1

Un médicament est administré par voie orale en une seule prise. Dans le cadre de cet exercice, on considérera que ce médicament passe par le système digestif puis dans le sang et est éliminé par filtration rénale comme illustré sur le graphique ci-dessous.

La vitesse d'absorption est proportionnelle à la concentration de médicament présente dans le système digestif avec un coefficient de proportionnalité égal à k_a (exprimé en h^{-1}). La vitesse d'élimination est proportionnelle à la concentration présente dans le sang avec un coefficient de proportionnalité égal à k_e (exprimé en h^{-1}).

$x(t)$ est la concentration de médicament dans le système digestif en fonction du temps t et $y(t)$ est la concentration de médicament dans le sang en fonction du temps t . En $t = 0$, la concentration de médicament dans le système digestif vaut w mg/L et est nulle dans le sang.

Les paramètres w , k_a et k_e sont strictement positifs avec $k_a > k_e$. Le temps t (en heures) est positif ou nul.



Question n°4 Quelques mesures de la concentration de médicament dans le sang ont été faites :

t (heure)	0	0,25	0,5	0,75	1
y(t) (mg/L)	0	0,9	1,2	1,1	0,9

Sur la base de ces mesures, on note A l'approximation de l'intégrale $\int_0^1 y(t)dt$ par la méthode des trapèzes.

Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte (à 0,05 mg.h/L près)?

- A. A vaut 0,7 mg.h/L
- B. A vaut 0,9 mg.h/L
- C. A vaut 1,2 mg.h/L
- D. A vaut 3,7 mg.h/L
- E. A vaut 4,2 mg.h/L

Question n°5 On étudie maintenant la concentration de médicament dans le sang en se plaçant à un temps précis t^* et en prenant en compte les incertitudes Δk_e et Δw sur les paramètres k_e et w . Les paramètres k_a et t^* sont supposés connus sans erreur. Dans ces conditions, cette concentration peut s'exprimer comme une nouvelle fonction $C(k_e, w)$ de k_e et w soit :

$$C(k_e, w) = \frac{wk_a}{k_a - k_e} (e^{-k_e t^*} - e^{-k_a t^*})$$

On cherche l'incertitude ΔC . Par convention, les incertitudes sont exprimées comme positives. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. $\Delta C \leq \left| \frac{\partial C}{\partial k_e} \right| \Delta k_e + \left| \frac{\partial C}{\partial w} \right| \Delta w$
- B. On trouve $\frac{\partial C}{\partial w} = \frac{k_a}{k_a - k_e} (e^{-k_e t^*} - e^{-k_a t^*})$
- C. On trouve $\frac{\partial C}{\partial k_e} = \frac{wk_a}{(k_a - k_e)} \left(t^* e^{-k_e t^*} + \frac{1}{k_a - k_e} (e^{-k_e t^*} - e^{-k_a t^*}) \right)$
- D. La différentielle logarithmique s'exprime par : $d \ln(|C|) = \frac{dC}{C}$
- E. $\frac{\Delta C}{C} \leq \frac{\partial \ln C}{\partial k_e} \Delta \ln k_e + \frac{\partial \ln C}{\partial w} \Delta \ln w$