

Corrigé exercice 1

1) Le discriminant du dénominateur de $f(x)$ vaut -3 , donc $x^2 - x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement positif (signe du coefficient de x^2), **donc $D_f = \mathbb{R}$.**

2) f étant une fonction rationnelle, son ensemble de dérivabilité est le même que son ensemble de définition. donc $D_{f'} = \mathbb{R}$.

3) f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 - x - 2$ et $v(x) = x^2 - x + 1$.

En appliquant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x - 2)(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{3(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

4) $f'(x)$ est donc * strictement positive sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$;

* strictement négative sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$;

* nulle en $\frac{1}{2}$.

Par conséquent **f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.**

5) La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la même que celle du quotient de ses termes de plus

haut degré $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$ **donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.**

6) **La droite D d'équation $y = 1$ est donc asymptote à C_f .**

Pour connaître les positions respectives de C_f et D , étudions le signe de $f(x) - 1$:

Pour tout x de D_f , $f(x) - 1 = \frac{(x^2 - x - 2) - (x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{-3}{x^2 - x + 1}$. Or le dénominateur est strictement positif (question 1). Donc $f(x) - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$ et **la courbe est donc en entier en dessous de son asymptote horizontale.**

7) L'équation de la tangente à C_f en son point d'abscisse a est : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ici, $a = 2$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$. D'où **l'équation de T : $y = x - 2$.**

8) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - (x - 2)$

$$f(x) - (x - 2) = \frac{(x^2 - x - 2) - (x - 2)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{-x(x-2)^2}{x^2 - x + 1}.$$

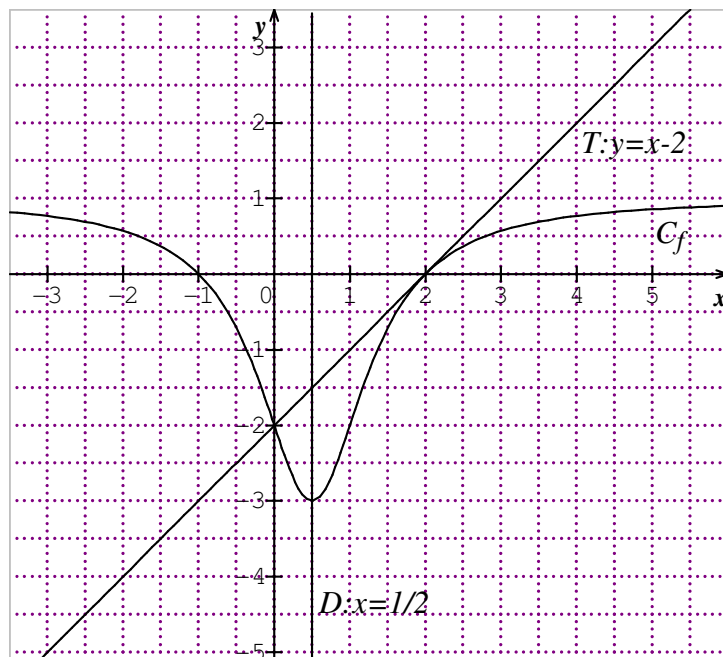
Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $f(x) - (x - 2)$ est celui de $-x(x-2)^2$, d'où :

sur $]-\infty; 0[$, C_f est au dessus de T ,

sur $]0; 2[$ et sur $]2; +\infty[$, C_f est en dessous de T ,

C_f coupe T en $(0; -2)$ et en $(2; 0)$.

9) Figure



10) D'après le dessin s'il y avait un axe de symétrie, il serait en $a = 0,5$, emplacement du minimum.

Or, pour tout h réel, tel que $\frac{1}{2} + h \in D_f$, c'est à dire pour tout h réel, puisque l'ensemble de définition est

$$\mathbb{R}, \text{ on a } \frac{1}{2} - h \in D_f \text{ et } f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + h\right) - 2}{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + h\right) + 1} = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} = f\left(\frac{1}{2} - h\right).$$

Les deux conditions sont vérifiées : **la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est donc bien axe de symétrie de la courbe**

Corrigé exercice 2

1) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a : $x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a+b)x + a-b+c}{(x-1)^2}$.

Par identification, on obtient le système $\begin{cases} a-2=-4 \\ 1-2a+b=8 \\ a-b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$.

D'où, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

2) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - (x-2)$ suivant les valeurs de x .

$f(x) - (x-2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$. Le signe de $f(x) - (x-2)$ est donc celui de $3x-2$ donc sur $] -\infty ; \frac{2}{3}[$, C est en dessous de D ; sur $] \frac{2}{3} ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, C est au dessus de D ; et C coupe D en son point d'abscisse $\frac{2}{3}$.

3) f étant une fonction rationnelle, son ensemble de dérivabilité est le même que son ensemble de définition. donc $D_{f'} = \mathbb{R}$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $v(x) = (x-1)^2$.

En appliquant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient : $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{x-3}{x-1}$

4) La fonction f est donc strictement croissante sur $] -\infty ; 1[$, strictement décroissante sur $]1 ; 3[$ et strictement croissante sur $[3 ; +\infty[$

5) En l'infini, on peut choisir les deux expressions de $f(x)$.

Par exemple on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Vers 1 : L'expression de départ de $f(x)$ donne une forme indéterminée. Choisissons alors la seconde expression :

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ donc forme indéterminée.

Modifions l'écriture de $f(x)$. $f(x) = (x-2) + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = +\infty$, (puisque son numérateur tend vers 1 et son dénominateur vers 0^+), donc par somme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-2) = 0$, comme ci-dessus, la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à C en $-\infty$.
La position de la courbe par rapport à cette droite a déjà été donnée à la question 2).

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à C .

7) L'équation de la tangente à C_f en son point d'abscisse a est donnée par la formule
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

On a $f(2) = 4$ et $f'(2) = -4$, donc $T: y = -4x + 12$.

8) Le tableau de variations de la fonction f est

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$

Figure

