

**Révisions fonctions rationnelles**  
**Deux exercices corrigés**

**Exercice 1 :** Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit  $f$  la fonction de variable réelle définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$ .

Soit  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  ?
2. Quel est l'ensemble de dérivabilité de  $f$  ?
3. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
4. Déterminer son signe, puis en déduire le sens des variations de  $f$ .
5. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
6. Déterminer les éventuelles asymptotes et leur position relative par rapport à  $C_f$ .
7. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en son point d'abscisse 2.
8. Étudier la position relative de  $C_f$  et de  $T$ .
9. Construire, sur le même dessin, la courbe  $C_f$ , la tangente  $T$  et les asymptotes éventuelles.
10. Pourrait-il y avoir un axe de symétrie ? Lequel ? Qu'en est-il vraiment ?

**Exercice 2 :** Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ .

1. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

2. Préciser la position de  $C$  par rapport à la droite  $D$  d'équation  $y = x - 2$ .
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ . Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et étudier son signe.
4. En déduire les variations de  $f$ .
5. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
6. Déterminer les éventuelles asymptotes et leur position relative par rapport à  $C_f$ .
7. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C$  en son point d'abscisse 2.
8. Construire, sur le même dessin, la courbe  $C$ , la droite  $D$  ainsi que la droite d'équation  $x = 1$  et la tangente  $T$ .