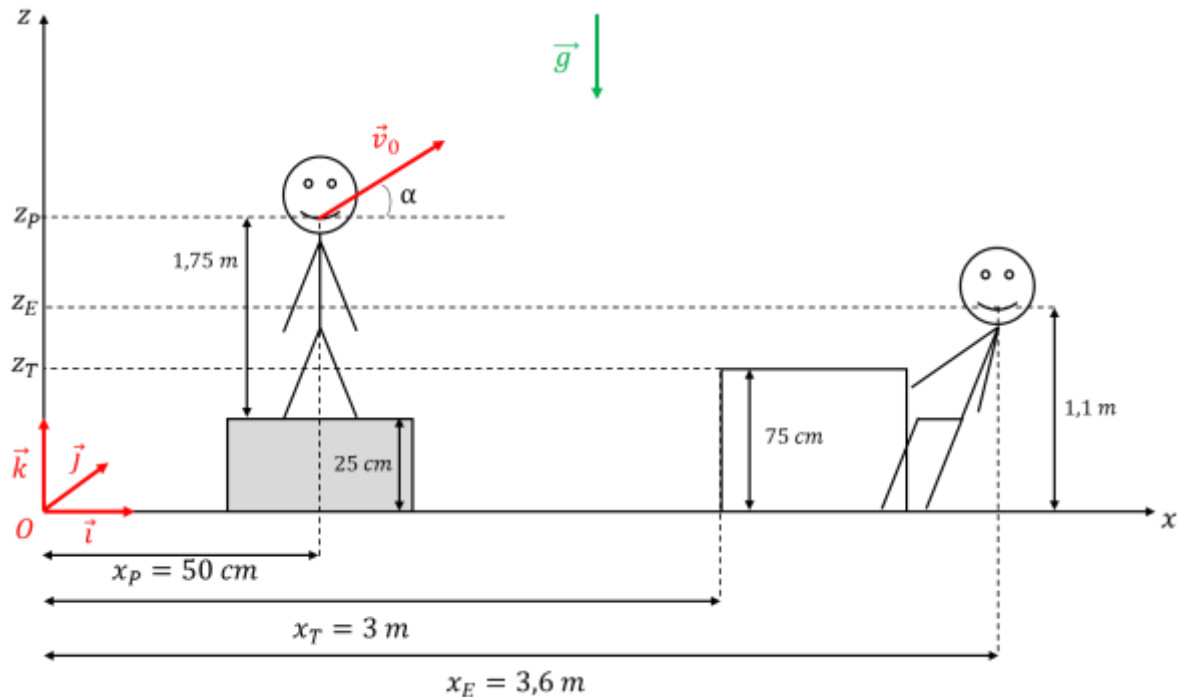


DM – Chapitre 07 – Mouvement dans un champ uniforme - Correction

La situation est décrite dans le schéma suivant :



- 1) Démontrer que l'équation de la trajectoire d'un postillon dans les conditions explicitées précédemment peut s'écrire :

$$z(x) = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} (x - x_p)^2 + \tan \alpha (x - x_p) + z_p$$

Remarque : Une rédaction détaillée et correctement justifiée est exigée.

- Définition du système et du référentiel d'étude : On étudie le centre de masse du postillon dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Conditions initiales :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} x_p \\ 0 \\ z_p \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_0}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

- Bilan des forces : Poids $\vec{P}$.
- Application de la 2^{ème} loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$ donc $\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$
- Primitivation :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t + x_p \\ 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t + z_p \end{pmatrix}$$

- Expression de la trajectoire :

$$t = \frac{x - x_p}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z(x) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t + z_p = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} (x - x_p)^2 + \tan \alpha (x - x_p) + z_p$$

2) A quelle distance x_{max} ce postillon peut-il aller avant de toucher le sol ?

Astuce : On pourra poser $X = x_{max} - x_p$.

On cherche x_{max} tel que $z(x_{max}) = 0$:

$$z(x_{max}) = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} (x_{max} - x_p)^2 + \tan \alpha (x_{max} - x_p) + z_p = 0$$

Ici il est judicieux de faire un changement de variable tel que $X = x_{max} - x_p$ comme indiqué dans l'astuce :

$$z(X) = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} X^2 + \tan \alpha X + z_p = 0$$

Ce qui nous ramène à une équation du second degré en X.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\tan \alpha)^2 + \frac{2gz_p}{(v_0 \cos \alpha)^2}$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\tan \alpha \pm \sqrt{(\tan \alpha)^2 + \frac{2gz_p}{(v_0 \cos \alpha)^2}}}{-\frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2}}$$

On élimine la solution négative ce qui donne :

$$X = \frac{\tan \alpha + \sqrt{(\tan \alpha)^2 + \frac{2gz_p}{(v_0 \cos \alpha)^2}}}{\frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2}} = \frac{\tan 37^\circ + \sqrt{(\tan 37^\circ)^2 + \frac{2 \times 9,81 \times 2}{(4,5 \times \cos 37^\circ)^2}}}{\frac{9,81}{(4,5 \times \cos 37^\circ)^2}} = 3,49 \text{ m}$$

Il vient donc :

$$x_{max} = X + x_p = 3,49 + 0,50 = 3,99 \text{ m}$$

3) Quelle est l'altitude maximale atteinte par ce postillon ?

On trouve l'altitude maximale z_{max} en trouvant la valeur de t tel que la vitesse selon z, v_z , s'annule :

$$v_z(t_{flèche}) = 0 = -gt_{flèche} + v_0 \sin \alpha$$

$$(t_{flèche}) = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} z_{max} = z(t_{flèche}) &= -\frac{g}{2} t_{flèche}^2 + v_0 \sin \alpha t_{flèche} + z_p \\ &= -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g} + z_p = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} + z_p \\ &= \frac{(4,5 \times \sin 37^\circ)^2}{2 \times 9,81} + 2 = 2,37 \text{ m} \end{aligned}$$

4) Montrer que ce postillon n'atteint pas le visage de l'élève.

Afin de répondre à cette question, nous allons calculer $z(x_E)$ afin de voir si cette valeur est supérieure ou inférieure à z_E :

$$\begin{aligned} z(x_E) &= -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} (x_E - x_p)^2 + \tan \alpha (x_E - x_p) + z_p \\ &= -\frac{9,81}{2(4,5 \times \cos 37^\circ)^2} (3,6 - 0,5)^2 + \tan 37^\circ (3,6 - 0,5) + 2 \\ &= 0,68 \text{ m} = 68 \text{ cm} \end{aligned}$$

Cette valeur étant inférieure à z_E on peut considérer que le postillon n'atteint pas le visage de l'élève.

- 5) Quelle devrait être la valeur v_0 de la vitesse du postillon pour qu'il atteigne la tête de l'élève ?

Il faut ici déterminer v_0 pour que $z(x_E) = z_E$:

$$\begin{aligned} z(x_E) = z_E &= -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} (x_E - x_p)^2 + \tan \alpha (x_E - x_p) + z_p \\ v_0 &= \sqrt{\frac{-g(x_E - x_p)^2}{2(z_E - \tan \alpha (x_E - x_p) - z_p)(\cos \alpha)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-9,81(3,6 - 0,5)^2}{2(1,1 - \tan 37^\circ (3,6 - 0,5) - 2)(\cos 37^\circ)^2}} = 4,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$