

Problème : (8pts)

$$(u_n): \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = a u_n + b. \end{cases}$$

1. a. Si $a = 1$ alors $(u_n): \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + b \end{cases} \quad 1$

(1,5) donc (u_n) est une suite arithmétique de raison b .

b. $\forall n \geq 0, \underline{u_n = u_0 + nb.} \quad 0,5$

2. On suppose $a \neq 1$ pour le reste de l'énoncé.

et $(v_n): \begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 0, v_n = u_n + \lambda. \end{cases}$

a. $\forall n \geq 0, v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = a u_n + b + \lambda.$$

(1) $\Leftrightarrow v_{n+1} = a(v_n - \lambda) + b + \lambda, \text{ car } u_n = v_n - \lambda. \quad 0,5$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = a v_n - a \lambda + b + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \underline{v_{n+1} = a v_n + [(1-a)\lambda + b]}. \quad 0,5$$

(0,5) b. (v_n) est géométrique $\Leftrightarrow \underline{(1-a)\lambda + b = 0}$ et $v_{n+1} = a v_n$

c. (v_n) est géométrique $\Leftrightarrow (1-a)\lambda + b = 0$ et $v_{n+1} = a v_n$

(0,5) $\Leftrightarrow \underline{\lambda = \frac{b}{a-1}} \text{ et } v_{n+1} = a v_n.$

car $a \neq 1$.

(0,5) d. Si $\lambda = \frac{b}{a-1}$ alors $\underline{v_n = v_0 \times a^n, \forall n \geq 0.}$

3. a. on pose $\lambda = \frac{b}{a-1}$

alors $\forall m \geq 0, v_m = u_m + \frac{b}{a-1}$ et $v_m = v_0 \times a^m$

et $v_0 = u_0 + \frac{b}{a-1} \cdot 0,5$

①

$\forall m \geq 0, u_m = v_m - \frac{b}{a-1}$

$\Leftrightarrow u_m = a^m \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1} \cdot 0,5$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{b}{a-1}$ si $-1 < a < 1$. 0,5

①

Si on a: $-1 < a < 1$ alors (u_n) converge vers $\frac{b}{1-a} \cdot 0,5$

4. Application directe:

$(u_n): \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 6. \end{cases}$

D'après la 3.a. on a: $\forall m \geq 0, u_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(5 + \frac{6}{\frac{1}{2}-1}\right) - \frac{6}{\frac{1}{2}-1}$

②

$\Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_n = -7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 12 \cdot 1$

$a = \frac{1}{2}$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc (u_n) converge vers 12. 0,5

Exercice 3: (3 pts)

on rappelle: $\forall n \geq 1, n! = n \times (n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

$$P_n: "n! \geq 2^{n-1}"$$

Initialisation:

$$\text{Si } n=1 \text{ alors } 1! = 1 \text{ et } 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

$$1! \geq 2^0. \quad 0,5$$

P_1 est vraie.

Hypothèse:

On suppose P_n vraie (H_n). 0,5

Hérédité:

On veut montrer que: $(n+1)! \geq 2^n$. 0,5

$$\text{D'après } (H_n): n! \geq 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow n! \times (n+1) \geq 2^{n-1} \times (n+1). \quad \text{car } (n+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (n+1)! \geq 2^n \quad \text{car } n+1 \geq 2. \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \Leftrightarrow n! \times (n+1) \geq 2^{n-1} \times (n+1) \\ \Leftrightarrow (n+1)! \geq 2^n \end{matrix}} \right\} 1$$

P_n est héréditaire.

Conclusion:

$$\forall n \geq 1, n! \geq 2^{n-1}. \quad 0,5$$