

**Devoir maison :**  
**Suite arithmético-géométrique.**

**Problème :** *Forme explicite d'une suite arithmético-géométrique.*

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b. \end{cases}$$

1. a. Que constate-t-on si  $a=1$  ?

b. En déduire la forme explicite de la suite  $(u_n)$ , en fonction de  $b, n$  et  $u_0$ .

Pour tout le reste de l'exercice on suppose que  $a \neq 1$ .

2. Suite auxiliaire  $(v_n)$  :

Soit la suite  $(v_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n + \lambda. \end{cases}$$

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n + [(1-a)\lambda + b]$ .

b. Pour que  $(v_n)$  soit une suite géométrique de raison  $a$ , qu'elle doit être la valeur du terme  $(1-a)\lambda + b$ .

c. En déduire la valeur  $\lambda$ , en fonction de  $a$  et  $b$ , pour que  $(v_n)$  soit géométrique de raison  $a$ .

d. Pour la valeur de  $\lambda$  trouvée précédemment,  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $a$ . Écrire la forme explicite de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $a, n$  et  $v_0$ .

3. Retour à la suite  $(u_n)$  :

a. À l'aide des questions précédentes, montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \left( u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}$ .

b. À quelle(s) condition(s) la suite  $(u_n)$  converge-t-elle ? Qu'elle est alors cette limite ?

4. Application directe :

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6. \end{cases}$$

Écrire  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .  $(u_n)$  Converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?