

Devoir maison n°2

La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Partie A : *Etude de la fonction g*

Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Etudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B : *Etude de la fonction f*

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f(x) - x = \frac{(1 - x) g(x)}{e^x - x}$$

- b. Etudier la position relative de la droite D et de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 1]$.

Partie C : *Etude de la suite (u_n)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 1}{e^{u_n} - u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.