

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales classées corrigées

Loi normale, Loi d'une somme,
Théorème Central Limite (TCL)

CORRIGE

TABLEAU DE REPONSES

2023	2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014
Q7 : AD	Q6 : A	Q6 : E	Q5 : C	Q5 : BE	Q2 : C	Q1 : BCD	Q1 : AB	Q2 : BE	Q8 : B
Q8 : E		Q7 : BCD		Q6 : AE	Q4 : AB	Q2 : A	Q2 : E		Q9 : ADE
		Q8 : A			Q5 : ABC	Q10 : BE			Q10 : BCDE
						Q11 : B			
						Q12 : D			

2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006
Q1 : ABCE	Q1 : BDE	Q2 : ADE	Q5 : ABC	Q2 : BCD	Q4 : AC	Q2 : BE	Q5 : B
Q6 : BD	Q4 : BCE	Q4 : E		Q3 : D	Q6 : ACE	Q5 : C	
	Q5 : C						

ANNALES CLASSEES CORRIGÉES SUPPLEMENTAIRES

2023	2022	2021
Session 2	Session 2	Session 2
Q5 : ABD	Q10 : DE	Q7 : B

Question n°7**D. VRAI**

Le nombre de complications X est la répétition de 60 expériences de Bernoulli (complications rares ou non).

On peut modéliser X par une loi binomiale avec :

$$X \sim \text{Bin}(n = 60; \pi = 0,01)$$

A. VRAI

On obtient à l'aide du formulaire :

$$E(X) = n\pi = 60 \times 0,01 = 0,6$$

B. FAUX

La loi binomiale est une loi discrète :

$$P(X = 60) \neq 0$$

C. FAUX

On vérifie les conditions d'application du théorème central limite pour une loi binomiale :

$$n\pi = 60 \times 0,01 = 0,6 < 5$$

$$n(1 - \pi) = 60 \times (1 - 0,01) = 59,4 \geq 5$$

Il n'est pas possible d'approximer le nombre de patients hospitalisés pour surveillance en utilisant une loi normale.

E. FAUX

On obtient à l'aide du formulaire :

$$\text{Var}(X) = n\pi(1 - \pi) = 60 \times 0,01(1 - 0,01) = 0,594$$

Question n°8

Réponse : E

Soit X : le nombre d'APP de votre hôpital :

$$X \sim \text{Poi}(\lambda_X = 3)$$

Soit Y : le nombre d'APP de l'hôpital francilien :

$$Y \sim \text{Poi}(\lambda_Y = 5)$$

Le somme de lois de Poisson est une loi de Poisson, on note Z : le nombre d'APP total :

$$Z \sim \text{Poi}(\lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y = 8)$$

Pour que tous les patients proviennent de Y et que $Z < 3$, il faut que X soit égal à 0 et Y peut prendre les valeurs 1 ou 2 :

$$P(\text{Proviennent de } Y | Z < 3) = \frac{P(\text{Proviennent de } Y \cap Z < 3)}{P(Z < 3)} = \frac{P(X = 0 \cap Y = 1 \text{ ou } 2)}{P(Z < 3)}$$

Les événements sont indépendants :

$$P(\text{Proviennent de } Y | Z < 3) = \frac{P(X = 0)P(Y = 1 \text{ ou } 2)}{P(Z < 3)}$$

On lit dans les tables de Poisson :

- Pour $\lambda = 3$ et $k = 0$: $P(X = 0) = 0,050$
- Pour $\lambda = 5$ et $k = 1$ et 2 : $P(Y = 1 \text{ ou } 2) = 0,034 + 0,084 = 0,118$
- Pour $\lambda = 8$ et $k = 0$ et 1 et 2 : $P(Z < 3) = 0,000 + 0,003 + 0,011 = 0,014$

$$P(\text{Proviennent de } Y | Z < 3) = \frac{0,050 \times 0,118}{0,014} = 0,42$$

Question n°6

A VRAI

La probabilité d'être testé quand on vient d'un pays classé orange est la même quelque soit le taux d'occupation de l'avion et vaut :

$$P(\text{Testé}|\text{Pays Orange}) = 0,5$$

B FAUX C FAUX

Soit X le nombre de passager à tester :

$$X \sim \text{Bin}(n = 324; 0,5)$$

La loi exacte est une loi binomiale donc une loi discrète pour laquelle on va avoir :

$$P(X = 0) \neq 0$$

$$P(X = 150) \neq 0$$

D FAUX

Les conditions du TCL sont respectées car :

$$n\pi = 324 \times 0,5 = 162 > 5$$

$$X \sim \text{Bin}(n = 324; 0,5) \rightarrow X \sim N(\mu = n\pi = 162; \sigma^2 = n\pi(1 - \pi) = 81)$$

La valeur $x = 150$ correspond à une valeur inférieure à la moyenne, on en déduit :

$$P(X > 150) > 0,5$$

E FAUX

Il s'agit de lois binomiales avec des paramètres différents, on obtient des valeurs différentes pour $P(X=150)$.

Question n°6

$$X \sim \text{Poi}(\lambda = 2,5)$$

A. Faux

La loi de Poisson est une loi discrète.

B. Faux

D'après la table de Poisson pour $\lambda = 2,5$:

$$P(X > 8) \approx 0,001$$

C. Faux

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

A l'aide de la table de Poisson :

$$P(X > 4) = 1 - 0,082 - 0,205 - 0,257 - 0,214 - 0,134 = 0,108$$

D. Faux

$$P(X < 1 | X < 2) = \frac{P(X < 1 \cap X < 2)}{P(X < 2)} = \frac{P(X < 1)}{P(X < 2)}$$

E. Vrai

Dans le cas d'une loi de Poisson : $E(X) = \lambda$.

$$P(X > 2,5) = 1 - P(X \leq 2)$$

A l'aide de la table de Poisson :

$$P(X > 2,5) = 1 - 0,082 - 0,205 - 0,257 = 0,456$$

Question n°7

D'après l'énoncé :

$$n = 10$$

$$P(M) = 0,4$$

A. Faux

Dans le cas d'une loi de Poisson : $E(X) = \lambda$

$$\rightarrow E(X) = 2,5$$

B. Vrai

Dans le cas d'une loi de Poisson : $\text{Var}(X) = \lambda$

$$\rightarrow \text{Var}(X) = 2,5$$

Y correspond au nombre de personnes à admettre avec $n = 10$ et $p = P(\text{test positif} = S)$

$$P(S) = P(S|M)P(M) + P(S|\bar{M})P(\bar{M})$$

$$P(S) = 0,9 \times 0,4 + (1 - 0,9) \times (1 - 0,4) = 0,42$$

Dans le cas d'une loi binomiale : $\text{Var}(Y) = np(1 - p)$

$$\text{Var}(Y) = 10 \times 0,42(1 - 0,42) = 2,436$$

Les variables sont indépendantes, on a :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2,5 + 2,436 = 4,936$$

C. Vrai

Si le service n'a pas assez de place, le nombre d'admissions dépasse les 8 patients. Si 7 personnes sont positives, il faut que $X > 1$.

D'après la table de la loi de Poisson pour $\lambda = 1$:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,082 - 0,205 = 0,713$$

D. Vrai

X et Y sont indépendants :

$$P(X = 4 \cap Y = 10) = P(X = 4) \times P(Y = 10)$$

E. Faux

X suit une loi de Poisson donc $(X+Y)$ ne suit pas une loi binomiale.

Question n°8

Réponse : A

D'après l'énoncé :

$$D_M \sim N(4; 1)$$

$$D_{\bar{M}} \sim N(?; 1)$$

$$\begin{aligned} Se &= P(S|M) = 0,90 \\ \rightarrow P(D > s | N(4; 1)) &= 0,9 \end{aligned}$$

On centre et on réduit la loi :

$$P\left(Z > \frac{s - 4}{1} = -x_\beta\right) = 0,9$$

A l'aide la table 2b, on a $\beta = 0,1$ qui correspond à $x_\beta = 1,28$, on en déduit :

$$s - 4 = -1,28 \rightarrow s = 2,72$$

$$\begin{aligned} Sp &= P(\bar{S}|\bar{M}) = 0,90 \\ \rightarrow P(D < s = 2,72 | N(?; 1)) &= 0,9 \end{aligned}$$

On centre et on réduit la loi :

$$P\left(Z < \frac{2,72 - \mu}{1} = x_\beta\right) = 0,9$$

A l'aide la table 2b, on a $\beta = 0,1$ qui correspond à $x_\beta = 1,28$, on en déduit :

$$2,72 - \mu = 1,28 \rightarrow \mu = 1,44$$

2023 Session 2

Question n°5

D'après l'énoncé, X_n suit une loi binomiale de paramètres $\pi = 0,5$ et n inconnu.

A. Vrai B. Vrai

Si $n = 1$, il s'agit d'une unique expérience, alors X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 0,5$.
On peut également dire que X_1 suit une loi binomiale de paramètres $\pi = 0,5$ et $n = 1$

C. Faux

On lit dans la table de la loi binomiale pour $n=3$, $k=2$, $\pi=0,5$. On obtient :

$$P(X_3 = 2) = 0,1406$$

D. Vrai

D'après le formulaire,

$$Var(X) = n\pi(1 - \pi) = 10 \times 0,5(1 - 0,5) = 2,5$$

E. Faux

On lit dans la table de la loi binomiale pour $n = 10$ et $\pi = 0,5$. On obtient :

$$P(X_{10} \geq 6) = 0,3770$$

$$P(X < 5) = 0,3770$$

2022 Session 2

Question n°10

D'après l'énoncé, X suit une loi binomiale de paramètres $\pi = 0,1$ et $n = 20$.

A. Faux

X suit une loi binomiale :

$$P(X = 0) \neq 0$$

B. Faux

X suit une loi binomiale :

$$P(X = 10) \neq 0$$

C. Faux

On lit dans la table de la loi binomiale pour $n = 20$, $k = 0$, $\pi = 0,1$. On obtient :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,12 = 0,88$$

D. Vrai

On lit dans la table de la loi binomiale pour $n = 20$, $k = 0$ et 1 , $\pi = 0,1$. On obtient :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,60$$

E. Vrai

Les probabilités associées à une loi binomiale dépendent de n et de π .

2021 Session 2

Question n°7

Réponse : B

D'après l'énoncé, X suit une loi binomiale de paramètres $\pi = 0,25$ et $n = 5$.

On lit dans la table de la loi binomiale pour $n = 5$, $k = 0$, $\pi = 0,25$. On obtient :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,24 = 0,76$$