

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales classées corrigées

Loi normale, Loi d'une somme,
Théorème Central Limite (TCL)

SUJET

Question n°7 Cette chirurgie est ambulatoire, c'est-à-dire que le patient rentre à domicile le jour même. Des complications rares surviennent dans 1% des cas et imposent que le patient passe la nuit à l'hôpital pour surveillance. On suppose que la survenue d'une complication est indépendante d'un patient à l'autre, et on note, X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de survenue d'une complication lors d'une opération et 0 sinon. Dans une journée où 60 patients sont opérés, parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Le nombre moyen de patients à hospitaliser pour surveillance est inférieur à 1
- B. La probabilité que tous les patients soient hospitalisés pour surveillance est nulle
- C. On peut approximer le nombre de patients hospitalisés pour surveillance en utilisant une loi normale
- D. On peut modéliser le nombre de patients hospitalisés pour surveillance par une loi binomiale
- E. La variance de X vaut 0,0099

Question n°8 Les chirurgiens viscéraux prennent en charge les appendicites aiguës (APP). Le nombre d'APP par semaine dans votre hôpital parisien peut se modéliser par une loi de Poisson de moyenne 3. Le nombre d'APP par semaine dans un autre hôpital francilien peut se modéliser par une loi de Poisson de moyenne 5 et on considère que les nombres de patients consultant dans les deux hôpitaux sont indépendants. Le service de chirurgie viscérale de l'hôpital francilien doit fermer temporairement à la suite d'une attaque informatique et il vous envoie tous leurs patients. Sur une semaine pendant cette fermeture, le nombre total de patients opérés d'APP a été strictement inférieur à 3, on cherche la probabilité qu'ils aient tous été adressés par l'hôpital francilien. Parmi les intervalles suivants, **lequel** contient la probabilité recherchée ?

- A. $[0 \% ; 10 \%$
- B. $[10 \% ; 20 \%$
- C. $[20 \% ; 30 \%$
- D. $[30 \% ; 40 \%$
- E. $[40 \% ; 50 \%$

2022**Exercice 2**

Au Canada, une procédure de test aléatoire est réalisée en plus de l'obligation de fournir un certificat de vaccination pour les voyageurs internationaux. La probabilité d'être testé dépend uniquement du pays de provenance selon une classification en 3 catégories liées à l'état de l'épidémie : 0,8 pour un pays classé rouge, 0,5 pour un pays classé orange et 0,2 pour un pays classé vert. Les tirages au sort des patients testés sont indépendants.

Question n°6 On s'intéresse au vol Paris-Toronto, un Airbus d'une capacité de 324 sièges qui est plein. La France est considérée comme un pays orange. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. La probabilité pour un passager d'être testé serait identique si ce vol était à moitié vide
- B. La probabilité qu'aucun passager de ce vol ne soit testé est nulle
- C. La probabilité qu'exactement 150 passagers de ce vol soient testés est nulle
- D. La probabilité qu'au moins 150 passagers de ce vol soient testés est de 10% (à 1% près)
- E. La probabilité qu'exactement 150 passagers de ce vol soient testés serait identique si ce vol était à moitié vide

2021**Exercice 2**

Le service post-urgence de l'hôpital de Krollstadt contient 8 lits qui servent à garder en observation les patients le nécessitant. Chaque matin, les médecins du service post-urgence transfèrent les patients admis la journée précédente dans l'un des autres services de l'hôpital ou les laissent rentrer à domicile, si ils n'ont plus besoin de soin. On considère que tous les matins à 8h le service post-urgence est vide et prêt à recevoir de nouveaux malades.

Question n°6 Soit X le nombre de patients ayant besoin d'être admis dans le service de post-urgence entre 8h du matin un jour donné et 8h le lendemain matin. On considère que X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'espérance 2,5.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. X est une variable aléatoire continue
- B. $P(X > 8) = 0$
- C. $P(X > 4) < 0,07$
- D. $P(X < 1 | X < 2) = P(X < 1)$
- E. $P(X > E(X)) < 0,5$

Question n°7 Une épidémie de maladie M se déclare à Krollstadt. En plus de l'activité habituelle des urgences, les autorités adressent chaque jour 10 personnes fortement susceptibles d'être atteintes de M. Elles bénéficient à l'hôpital d'un test diagnostic et ne sont admises dans le service post-urgence que si le test est positif. La sensibilité du test est de 0,90 et sa spécificité de 0,90. On rappelle que la sensibilité correspond à la probabilité d'avoir un test positif sachant que le patient est malade et que la spécificité correspond à la probabilité d'avoir un test négatif sachant que le patient n'est pas malade. On considère que chacune des 10 personnes a, de manière indépendante des autres, 40% de risque d'être malade. Soit Y le nombre de personnes à admettre parmi ces 10 personnes pendant une journée. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. L'espérance de X vaut 4
- B. $Var(X + Y) = 4,94$ à 0,01 près
- C. Si 7 des personnes adressées sont positives, il y a 71% de risque que le service post-urgence n'ait pas assez de place (à 1% près)
- D. $P(X = 4 \text{ et } Y = 10) = P(X = 4) \times P(Y = 10)$
- E. (X+Y) suit une loi binomiale

Question n°8 Le test diagnostic est fondé sur le dosage de la concentration d'une protéine présente dans le plasma sanguin. Ce dosage est supposé suivre une loi normale. Le test est positif si le dosage est supérieur à un seuil s. Chez les malades, l'espérance de ce dosage vaut 4 et sa variance vaut 1. La variance de ce dosage est supposée identique chez les malades et chez les non malades.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ? L'espérance du dosage de la concentration plasmatique de cette protéine chez les non malades vaut (à 0,05 près)

- A. 1,4
- B. 2,7
- C. 4,0
- D. 5,3
- E. 6,6

2020

Le responsable de l'hôpital de Dache décide de mettre en place un système d'évaluation de la satisfaction des patients hospitalisés. Cet hôpital ne comprend que 2 services (Service A et Service B). A la sortie de l'hôpital, on demande à chaque patient de donner une note de satisfaction à propos de leur hospitalisation. Cette note est mesurée sur l'échelle des entiers compris entre 0 et 10 (0 correspondant à une absence totale de satisfaction et 10 à une satisfaction maximale).

On considère maintenant la note moyenne M_A du service A et la note moyenne M_B du service B obtenues sur les G premiers mois de l'année qui a vu 600 patients sortir de chacun des services.

Question n°5 On considère que les notes sont indépendantes d'un service à l'autre. Soit M la moyenne globale obtenue dans l'ensemble de l'hôpital de Dache.

Cochez **LA** réponse exacte.

- A. $E(M) = E(M_A) + E(M_B)$
- B. $Var(M) = Var(M_A) = Var(M_B)$
- C. $Var(M) = \frac{Var(M_A) + Var(M_B)}{4}$
- D. $Var(M) = \frac{E((M_A + M_B)^2) - (E(M_A + M_B))^2}{2}$
- E. $Var(M) = E(M)$

2019

On considère pour la suite de l'exercice que la prévalence des pneumopathies parmi les patients consultants aux urgences de l'hôpital de Champignac est de 0,10.

La procédure suivante est mise en place aux urgences. Si le logiciel classe la radio A , le patient n'est pas traité pour pneumopathie; si le logiciel classe la radio C , le patient est traité par antibiotiques pour sa pneumopathie et si le patient est classé D , la radio est relue par un radiologue et le dosage d'un biomarqueur sanguin $BIOM$, permettant d'aider au diagnostic, est réalisé. On sait que $P(D) = 0,40$ et que 20% des patients classés D aux urgences de Champignac ont une pneumopathie

On rappelle que la sensibilité d'un test diagnostique est la probabilité d'avoir un test positif si on est malade, que la spécificité d'un test diagnostique est la probabilité d'avoir un test négatif si l'on n'est pas malade et que la valeur prédictive positive est la probabilité d'être malade si l'on a un test positif.

Question n°5 La distribution de $BIOM$ suit une loi exponentielle d'espérance 3 chez les patients **non atteints** d'une pneumopathie et une loi normale de moyenne 10 et de variance 4 chez les patients **atteints** d'une pneumopathie. On fixe un seuil S tel que sa sensibilité soit de 97,5%. On considère qu'une valeur de $BIOM$ au dessus de S correspond à un test diagnostique positif. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. La spécificité du test vaut 95% (à 2% près)
- B. La spécificité du test vaut 85% (à 2% près)
- C. Il faut considérer que la prévalence de la maladie est toujours de 10%
- D. Si on augmente la valeur du seuil, la sensibilité augmente
- E. La valeur prédictive positive du test est plus élevée au sein des patients classés D qu'au sein de l'ensemble des patients consultant aux urgences de Champignac

Question n°6 Le problème de cette procédure est qu'elle est plus longue, et qu'il faut des brancards à disposition pour les patients en attente de la relecture de la radio et du dosage de *BIOM*. On considère que le nombre de brancards, dont on a besoin aux urgences par heure, a une moyenne et une variance de 2. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. On peut modéliser le nombre de brancards par heure dont on a besoin aux urgences par une loi de Poisson
- B. La loi suivie par le nombre de brancards par heure dont on a besoin aux urgences est une loi uniforme car l'effectif ne dépend pas du temps
- C. La loi suivie par le nombre de brancards par heure dont on a besoin aux urgences étant sans mémoire, on peut considérer que la durée moyenne de séjours des patients classés *D* est d'une heure
- D. Durant une heure donnée, il y a plus de chances que l'on ait besoin de deux brancards que d'un seul brancard (à 2% près)
- E. Durant une heure donnée, il y a moins de 6% de chances que l'on ait besoin de strictement plus de 4 brancards de libre (à 2% près)

Question n°2

En supposant que les 8 vaccins recommandés sont appliqués en totalité chez 25% des enfants, de façon indépendante d'un enfant à l'autre, que pouvez-vous dire sur la vaccination par l'ensemble de ces 8 nouveaux vaccins ?

Cochez LA bonne réponse.

- A. La probabilité que dans un groupe de 10 enfants, la moitié au moins soit vaccinée est de 6% (à 0,2% près).
- B. Si le nombre d'enfants dans le groupe passe de 10 à 12 enfants, la probabilité que la moitié exactement soit vaccinée est multipliée par 2.
- C. Il y a au plus 1 chance sur 1000 que tous les enfants d'un groupe de 5 soient vaccinés.
- D. Plus le groupe augmente de taille, plus la probabilité qu'aucun des enfants du groupe ne soit vacciné augmente.
- E. On peut approcher tous ces calculs en utilisant une loi de Poisson.

Question n°4

Le coût total de ces vaccins (pour une famille non affiliée à la sécurité sociale) pendant les 18 premiers mois du nourrisson atteindrait en moyenne 364 euros, et serait comprise entre 328 et 400 euros dans 95% des cas. En supposant que ce coût soit distribué selon une loi normale, que peut-on dire ?

Cochez la ou les bonnes réponses.

- A. La probabilité pour que le coût dépasse 400 euros est de 2,5% (à 0,5% près).
- B. La probabilité pour que le coût soit compris entre 390 et 400 euros est de 5% (à 1% près).
- C. La probabilité pour que le coût soit de 364 euros est de 50% (à 1% près).
- D. La médiane du coût est strictement supérieure à 364 euros.
- E. Il manque la valeur exacte de l'écart-type de la loi.

Question n°5

On s'intéresse au coût total pour une famille de 4 enfants non pris en charge par la sécurité sociale. On supposera les coûts individuels indépendants. Que peut-on dire ?

Cochez la ou les bonnes réponses.

- A. Il a pour médiane 1456 euros.
- B. Il y a 2,5% de chances (à 0,5% près) que ce coût soit d'au moins 1528 euros.
- C. La loi de la somme est une loi normale.
- D. Il a fallu appliquer le théorème limite central.
- E. On ne peut faire de calculs de probabilité car les conditions d'application du théorème limite central ne sont pas vérifiées.

Tables statistiques 5 (loi binomiale)

Soit $X \sim \text{Bin}(n, p)$. La table (voir aussi les 2 pages suivantes) donne $P(\{X = k\})$.

n	k	p									
		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,75	0,8	0,9
1	0	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,2500	0,2000	0,1000
	1	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7500	0,8000	0,9000
2	0	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0,1600	0,0625	0,0400	0,0100
	1	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	0,4800	0,3750	0,3200	0,1800
	2	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	0,3600	0,5625	0,6400	0,8100
3	0	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0,0640	0,0156	0,0080	0,0010
	1	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	0,2880	0,1406	0,0960	0,0270
	2	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	0,4320	0,4219	0,3840	0,2430
	3	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	0,2160	0,4219	0,5120	0,7290

Vous êtes responsable du développement d'un nouveau traitement contre la grippe sévère. On suppose que la probabilité de toxicité de ce traitement augmente avec la dose.

Pour évaluer ce nouveau traitement, un laboratoire vous fournit des comprimés de 5 doses (notées d_1 à d_5) différentes dont les probabilités de toxicité sont supposées ordonnées de façon croissante. Vous proposez de mettre en place un essai clinique dit '3+3'. Brièvement, cela consiste à administrer la dose d_1 à 3 malades (ayant été informés et ayant donné leur consentement à participer). Puis, selon les réponses observées :

- Si aucune toxicité n'est observée parmi les 3, on inclut 3 nouveaux malades à la dose supérieure (d_2).
- Si une seule toxicité est observée, on inclut 3 nouveaux malades à cette même dose : si aucune nouvelle toxicité n'est observée, on poursuit l'essai comme précédemment ; si au moins une nouvelle toxicité est observée, on arrête l'essai.
- Si plus d'une toxicité sur les 3 malades est observée on arrête l'essai.

L'essai se poursuit par escalade selon ce schéma jusqu'à l'obtention d'une décision d'arrêt.

NB : On supposera dans tout l'exercice l'indépendance entre les réponses des individus.

Question n°1 On suppose que la première dose d_1 a une probabilité de toxicité de 0,30. Cochez la(les) proposition(s) exacte(s) à 0,02 près.

- A. La probabilité d'arrêter l'essai après l'inclusion de 3 malades seulement est de 0,30.
- B. La probabilité d'inclure 3 nouveaux malades à la même dose d_1 après les 3 premiers est de 0,45.
- C. La probabilité d'observer encore exactement une toxicité sur 3 nouveaux malades si on a observé exactement 1 toxicité sur les 3 premiers est de 0,45.
- D. La probabilité que la dose d_2 soit testée est de 0,50.
- E. Le nombre de toxicités suit une loi de Poisson.

Question n°2 Vous terminez l'essai et la dose retenue est la dose d_3 . Elle a conduit à observer 3 toxicités sur 6 malades ayant reçu cette dose. Cochez **LA** proposition exacte.

- A. Vous estimez que l'espérance du nombre de toxicités à la dose d_3 parmi 6 malades est de 3.
- B. Vous estimez que l'espérance du nombre de toxicités à la dose d_3 parmi 6 malades est de 0,50.
- C. La variance estimée du nombre de toxicités sur 6 malades est de $1/12$.
- D. La variance estimée du nombre de toxicités sur 6 malades est de $12/5$.
- E. Ces calculs sont invalides car le théorème limite central ne s'applique pas.

Le directeur d'un hôpital de moyen séjour souhaite commander des vaccins contre la grippe pour son personnel de santé, car il a décidé que chacun devrait être vacciné avant l'hiver.

Son établissement compte 4 services. Dans chaque service, le personnel de santé est composé de 25 personnes travaillant le jour et 5 personnes travaillant la nuit. Il sait aussi que la probabilité de se faire vacciner en dehors de son établissement par un médecin généraliste est de 10% ; pour ces personnels, l'hôpital n'aura pas à fournir le vaccin.

NB : Pour tout l'exercice, on supposera que l'ensemble des personnels agissent indépendamment les uns des autres concernant la vaccination

Question n°10 On s'intéresse au nombre X d'individus du personnel de santé qui vont se faire vacciner dans l'établissement. Cochez la(les) proposition(s) exacte(s).

- A. X est une variable qualitative.
- B. X est une variable aléatoire.
- C. L'espérance de X vaut 12.
- D. $P(X = 108) = 0$.
- E. La fonction de répartition de X est discontinue en marches d'escalier.

Question n°11 De manière empirique, le directeur provisionne 18 vaccins pour le personnel de nuit. Cochez **LA** proposition exacte.

- A. La probabilité qu'il manque des vaccins pour le personnel de nuit est de 30% (à 3% près).
- B. La probabilité qu'il manque des vaccins pour le personnel de nuit est de 40% (à 3% près).
- C. La probabilité qu'il manque des vaccins pour le personnel de nuit est de 60% (à 3% près).
- D. La probabilité qu'il manque des vaccins pour le personnel de nuit est de 70% (à 3% près).
- E. La probabilité qu'il manque des vaccins pour le personnel de nuit est de 99% (à 3% près).

Question n°12 Pour le personnel de jour, le directeur décide de procéder de manière plus scientifique et veut déterminer le plus petit nombre de vaccins à commander lui permettant de n'en manquer pour eux que dans 5% des cas. Cochez **LA** proposition exacte.

- A. Il doit provisionner 92 vaccins pour le personnel de jour.
- B. Il doit provisionner 93 vaccins pour le personnel de jour.
- C. Il doit provisionner 94 vaccins pour le personnel de jour.
- D. Il doit provisionner 95 vaccins pour le personnel de jour.
- E. Il doit provisionner 96 vaccins pour le personnel de jour.

2016

Les infections à méningocoques sont des infections graves, avec une mortalité importante et survenant de manière isolée ou par épidémie.

Question n°1 Un médecin souhaite prédire le nombre de cas d'infection à méningocoques qu'il observera dans son canton en 2016. Les informations que lui donnent les autorités sanitaires sont que la distribution du nombre annuel de cas dans son canton suit une loi de Poisson dont l'espérance est 0,5. Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. La variance du nombre de cas dans le canton est égale à 0,5.
- B. La probabilité de n'observer aucun cas est égale à 61% (à 1% près).
- C. La probabilité d'observer 5 cas vaut exactement 0.
- D. On peut approximer la loi suivie par le nombre annuel de cas dans son canton par une loi normale de moyenne 0,5 et de variance 0,25.
- E. On peut approximer la loi suivie par le nombre annuel de cas dans son canton par une loi binomiale de paramètre $Bin(n=2, p=0,5)$.

Question n°2 Ce même médecin est à la tête d'un réseau de 98 cantons qui partagent les mêmes caractéristiques concernant le nombre annuel de cas de méningite et sont considérés comme indépendants. Il s'intéresse au nombre annuel total d'infections à méningocoques qu'il observera dans son réseau en 2016 et souhaite pouvoir mettre en place un seuil de détection d'un nombre annuel trop élevé dans son réseau. Il ne souhaite déclencher une alerte que dans 2,5% des cas (à 0,5% près). Cochez **LA** réponse exacte.

- A. Il fixe le seuil à 55 cas.
- B. Il fixe le seuil à 57 cas.
- C. Il fixe le seuil à 59 cas.
- D. Il fixe le seuil à 61 cas.
- E. Il fixe le seuil à 63 cas.

2015

QCM 2 – En Wallonie, cette annonce a conduit à un mouvement de protestation des étudiants en médecine francophones. Ainsi, quelques 5000 manifestants selon les estimations de la police, essentiellement (98%) de jeunes étudiants en médecine, se sont rassemblés mercredi 29 octobre 2014, devant le siège du ministère de la santé. Un journaliste décide d'interviewer un groupe de 10 manifestants au hasard dans la rue. Quelle est la probabilité (à 0,001 près) qu'il y ait parmi eux deux manifestants qui ne soient pas des étudiants en médecine ? Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A - 0,001
- B - 0,016
- C - 0,054
- D - 0,271
- E - Ce calcul est erroné s'il a sélectionné les étudiants par couple

Au total, le groupe interrogé comprenait 8000 individus (4000 hommes et 4000 femmes), dont 1000 (750 hommes et 250 femmes) ont rapporté un comportement violent.

QCM 8 Les femmes violentes étaient âgées en moyenne de 30 ans, avec un écart-type de 10 ans. Quelle proportion de ces femmes avaient entre 18 et 22 ans ? On supposera que la distribution de l'âge est gaussienne ? Cochez LA proposition exacte (à 0,02 près).

- A - 0,05
- B - 0,10
- C - 0,25
- D - 0,50
- E - 0,75

QCM 9 Les troubles de la personnalité ont été diagnostiqués sur les réponses des sujets à 80 questions en « oui » ou « non ». Du fait de la longueur du questionnaire, certains sujets (en proportion 10%, et ce quelque soit leur sexe ou leur histoire de violence) ont omis de répondre à au moins une question (dont la réponse est alors « manquante »). On notera p , la probabilité d'oubli à chaque question. Que peut-on affirmer de façon exacte sur le nombre X de réponses manquantes observées sur un questionnaire pris au hasard parmi les sujets de l'étude. Cochez la ou les propositions exactes.

- A - X suit une loi $\text{Bin}(n=80, p)$
- B - X suit une loi de Poisson $(80 \times p)$
- C - p est tel que $0,10 = 1 - p^{80}$
- D - p est tel que $0,10 = 1 - (1 - p)^{80}$
- E - Il a fallu supposer que l'oubli ne dépend pas de la position ni du contenu de la question

QCM 10 On veut évaluer le nombre total Y de réponses manquantes sur l'ensemble des questionnaires de personnalité remplis par les femmes violentes interrogées. On considérera que $p=0,001$. Cochez la ou les propositions exactes.

- A - Le nombre attendu de questions manquantes est inférieur à 1
- B - Le nombre attendu de questions manquantes est 20 (à 1 près)
- C - La loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson
- D - La loi de Y peut être approchée par une loi de Gauss
- E - On a supposé que l'oubli était indépendant du sexe et du caractère violent du sujet

La plupart des fœtus adoptent en fin de grossesse une position « tête en bas » dans l'utérus, de façon à ce qu'ils puissent sortir de la filière pelvi-génitale de cette manière. Cependant, il arrive parfois que le fœtus ait la tête vers le haut, et que le fessier ou les pieds du bébé se présentent en premier. C'est ce que l'on appelle une présentation par le siège. Un médecin obstétricien décide de mener des études sur ce sujet.

QCM1 - Dans la population générale, la prévalence des accouchements par le siège est de 1%. En supposant que ce pourcentage est correct, il décide de compter le nombre de présentations par le siège, Y , dans un échantillon de 100 femmes représentatif de la population générale. Cochez la ou les propositions exactes.

- A. Le nombre attendu de telles présentations est de 1
- B. Il peut affirmer que Y suit une loi Binomiale de paramètres 100 et 0,01
- C. Il peut considérer que Y suit une loi de Poisson de paramètre 1
- D. Il peut considérer que Y suit une loi Normale de paramètres $\mu = \sigma = 1$
- E. Il a autant de chances d'en observer 0 que 1 (à 1% près)

QCM6 - L'enfant naît par le siège. Le médecin commence par mesurer le nombre de battements cardiaques du nouveau-né durant une minute. Il sait que ce nombre suit, chez les enfants nés par le siège, une loi Normale centrée sur 100 et de variance 25. Cochez la ou les propositions exactes (à 0,01 près)

- A. La probabilité pour que l'enfant présente plus de 110 battements par minute est de 0,05
- B. La probabilité pour que l'enfant présente plus de 110 battements par minute est de 0,025
- C. La probabilité pour que l'enfant présente moins de 110 battements par minute est de 0,95
- D. La probabilité pour que l'enfant présente moins de 100 battements par minute est de 0,50
- E. Il a utilisé le théorème de la limite centrale

2012

Le docteur N est nommé expert auprès du Tour de France pour organiser le contrôle de dopage des coureurs cyclistes. Il dispose des données enregistrées sur les 10 dernières années, et du tableau suivant sur ces coureurs (200 par an), selon le rang d'arrivée des coureurs. On classe les coureurs dans deux catégories : du 1^{er} au 10^{ème}, et du 11^{ème} au 200^{ème}

Caractéristique	des 10 premiers	Des 11èmes-200èmes	Total
Age, moyenne $\pm$ écart-type	25 $\pm$ 4	26 $\pm$ 4	26 $\pm$ 4
Age < 18	4%	2,5%	2,6%
Durée moyenne sur la dernière étape des Champs Elysées (h)	1,5	2	2
Recherche de toxique dans les urines*	80%	20%	?
Proportion de détectés dopés sur les urines analysées	1%	1%	1%

* réalisée de façon aléatoire sur chaque catégorie de classement

QCM 1 - Que peut-il affirmer à partir de ces données ? Cochez la ou les propositions exactes. On suppose que l'âge des coureurs est distribué selon une loi Normale.

- A. 50% des coureurs ont bénéficié d'une recherche de toxique
- B. 23% des coureurs ont bénéficié d'une recherche de toxique
- C. La proportion de coureurs classés dans les 10 premiers qui a moins de 20 ans est de 20% (à 1% près)
- D. La proportion de coureurs classés dans les 10 premiers qui a moins de 20 ans est de 10% (à 1% près)
- E. Etre dans les 10 premiers est indépendant d'être détecté dopé sur les urines

QCM 4 - Si le Dr N pouvait analyser les urines de 200 coureurs de l'année et compter le nombre X de détectés dopés, cochez la ou les propositions exactes.

- A. La probabilité pour qu'il y ait un dopé seulement est de 1% (à 2‰ près)
- B. La probabilité pour qu'il y ait un dopé seulement est de 27% (à 2‰ près)
- C. X suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,01
- D. X peut être considéré comme une variable de Poisson de moyenne 0,01
- E. X peut être considéré comme une variable de Poisson de moyenne 2

QCM 5 - Il décide de mettre au point une nouvelle technique de détection du dopage, à partir d'une microponction au doigt du coureur de 10 gouttes de sang posées sur un papier buvard. Sur chaque goutte, le test consiste à poser une goutte d'un nouveau marqueur qui vire au rouge en cas de présence de toxique 8 fois sur 10, mais 1 fois sur 5 en absence de moindre dopage. Il pense que si au moins 7 gouttes sur 10 deviennent rouges, il pourra considérer que le coureur est dopé. Cochez LA proposition exacte. On rappelle que la sensibilité d'un test est la proportion de tests positifs chez les « malades » et la spécificité du test la proportion de tests négatifs chez les « non malades ».

- A. La sensibilité du test est de 80% et la spécificité du test est de 20%
- B. La sensibilité et la spécificité du test sont de 80% toutes les deux
- C. La sensibilité du test est supérieure à 80% et la spécificité du test supérieure à 95%
- D. La sensibilité du test est supérieure à 80% et la spécificité du test inférieure à 5%
- E. La sensibilité du test est inférieure à 80% et la spécificité du test supérieure à 95%

2011

Un médecin décide de réaliser l'expérience suivante dans son laboratoire. Il dispose d'une boîte en forme d'étoile à cinq branches au bout desquelles sont situées des niches numérotées de 1 à 5, dont seule l'une d'entre elles contient du fromage. Il place une souris au centre de cette boîte et note la niche où se réfugie la souris.

QCM 2 Il place une même souris au centre de la boîte 5 fois de suite et compte le nombre de fois où la souris trouve le fromage. Parmi les réponses suivantes, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - Ce nombre suit une loi binomiale
- b - La probabilité pour que la souris trouve le fromage une fois est de $1/5$
- c - La probabilité pour que la souris trouve le fromage 4 fois est de $(1/5)^4$
- d - Il y a moins d'une chance sur 100 pour que la souris trouve au moins 4 fois le fromage
- e - Il faut bien sûr supposer que la souris n'a aucune mémoire de l'expérience

QCM 4 Il décide maintenant d'enregistrer le temps Y en secondes que mettent les souris à trouver le fromage. Il enregistre le temps en comptant les secondes à voix haute. Parmi les réponses suivantes, dire LA proposition vraie.

- a - Il peut modéliser Y par une loi exponentielle car l'échelle de mesure est continue
- b - Il peut modéliser Y par une loi exponentielle car l'échelle de mesure est discrète
- c - Il peut modéliser Y par une loi de Poisson car la probabilité de succès à chaque seconde est rare
- d - Il peut modéliser Y par une loi binomiale car l'échelle de mesure est bornée
- e - La loi exponentielle n'est pas le meilleur choix de modélisation pour Y eu égard à l'échelle

2010

QCM 5 On considère que, dans une maternité, un jeune échographiste commet une erreur dans la prédiction du sexe avec une probabilité de 0,20. Celui-ci s'interroge sur le nombre d'erreurs qu'il commet sur les femmes qui viennent le consulter. Dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - Sur les 20 femmes vues dans le mois, le nombre d'erreurs le plus probable qu'il commet est de 4
- b - Il y a près d'une chance sur 3 (à 0,01 près) pour qu'il n'ait commis aucune erreur sur les 5 femmes venues la semaine dernière
- c - Plus il voit de femmes, plus le nombre attendu d'erreurs augmente
- d - Plus il voit de femmes, moins le nombre attendu d'erreurs augmente
- e - Le nombre attendu de ses erreurs ne dépend pas du nombre de femmes qu'il voit

2009

Une boîte d'ampoules contient n_1 ampoules d'un médicament X et, suite à une erreur, n_2 ampoules d'un produit Y. On s'interroge sur l'expérience qui consiste à choisir une ampoule dans cette boîte, et noter le produit qu'elle contient.

QCM 2 Dans un hôpital, une infirmière répète l'expérience N jours consécutifs. Soit J_y , le nombre total de jours où elle obtient une ampoule de Y. On peut affirmer que J_y suit une loi binomiale.

Dire la(les) proposition(s) vraie(s)?

- a - Les paramètres de la loi sont n_2 et $n_2/(n_1 + n_2)$
- b - Les paramètres de la loi sont N et $n_2/(n_1 + n_2)$
- c - Il a fallu supposer par exemple que chaque jour, elle remet l'ampoule dans la boîte après l'avoir choisie
- d - Il a fallu supposer par exemple que chaque jour, elle ouvre une boîte au contenu identique à la précédente
- e - Si n_1 est très petit devant n_2 , on pourra approcher cette loi par une loi de Poisson

QCM 3 On apprend que ce "mélange" d'ampoules de Y dans les boîtes de X résulte d'une erreur de conditionnement dans l'usine voisine, lorsque survient un décalage de vitesse des tapis respectifs de production des ampoules de X et de Y. On notera ε le décalage (exprimé en secondes) des vitesses de ces deux tapis. On suppose que ε est distribué selon une loi de Gauss d'espérance 0 et de variance 4. Des ampoules de Y peuvent "tomber" dans une boîte de X lorsque ε est supérieur à un certain seuil, s. Cet événement survient avec une probabilité de 0,01. Quelle est la valeur du seuil s en secondes (à 0,1 près)? Dire LA proposition vraie.

- a - 1,3
- b - 2,3
- c - 2,6
- d - 4,6
- e - 9,2

2008

Huit étudiants souhaitent organiser une fête de fin d'année. Ils décident d'envoyer des invitations, tout en réalisant l'organisation de cette fête en parallèle.

QCM 4 Si chaque étudiant adresse en moyenne 200 invitations, avec un écart-type de 50, et en supposant toujours les nombres d'invitations gaussiens, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - Le nombre total d'invitations est une variable gaussienne d'écart-type 140 (à 5 près)
- b - Le nombre total d'invitations est une variable gaussienne d'écart-type 400 (à 5 près)
- c - On a supposé les nombres d'invitations des 8 étudiants indépendantes
- d - On a appliqué le théorème limite central
- e - On ne peut faire ce calcul car il y a 8 étudiants et le théorème limite central ne s'applique pas

QCM 6 Dans la mise sous enveloppes des 1200 invitations, quelques erreurs ont été commises. En supposant que les erreurs sont indépendantes et qu'elles ont été effectuées pour une invitation sur 1000, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité qu'il n'y ait aucune erreur est de 0,30 (à 0,002 près)
- b - La probabilité qu'il n'y ait aucune erreur est de 0,37 (à 0,002 près)
- c - On a assimilé la loi du nombre d'erreurs à une loi de Poisson
- d - On a assimilé la loi du nombre d'erreurs à une loi exponentielle
- e - L'approximation de la loi du nombre d'erreurs par une loi de Gauss n'est pas valide ici

2007

Un secrétariat hospitalier a établi sur plusieurs années la distribution du nombre X d'appels téléphoniques par minute les jours ouvrés de la semaine (Lundi à Vendredi), tabulée ci-dessous.

Nombre appels, x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X \leq x)$	0,05	0,15	0,30	0,50	0,70	0,85	0,95	1,00

QCM 2 Quelle est la probabilité que, sur 10 minutes, il y ait exactement 3 appels chaque minute? Dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - 0
- b - $< 1/1\,000\,000$
- c - $1/1000$
- d - $1/2$
- e - le nombre de minutes parmi 10 avec exactement 3 appels suit une loi binomiale

QCM 5 On suppose que la loi de X , les seuls jours de semaine, peut être assimilée à une loi de Poisson de moyenne 4. Cela signifie que, pour chaque minute des jours de la semaine. Dire **la proposition vraie**.

- a - Il y a exactement 4 appels
- b - Il y a toujours au moins un appel
- c - Il y a autant de chances qu'il y ait 3 ou 4 appels
- d - Il y a une chance sur 2 qu'il y ait au plus 3 appels
- e - On ne peut faire ces calculs car l'appel n'est pas un événement rare

2006

Vous décidez d'utiliser la température corporelle, mesurée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$), des patients atteints de grippe sévère, 3 jours après le début de leur maladie, pour détecter les malades qui s'aggravent. **On supposera par la suite que cette mesure de la température est une variable Gaussienne.**

On sait que, chez les malades qui ne s'aggravent pas (neuf sur 10), la température fluctue autour de sa moyenne μ_1 dans 95% des cas entre 35,5 et 37,5 et que chez les malades aggravés, la température fluctue autour de sa moyenne $\mu_2=39$ avec un écart-type $\sigma_2=1$.

QCM 5 Parmi les malades grippés, quelle est la proportion de malades qui s'aggravent avec une température supérieure à 38°C ? Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est vraie (à 1% près)?

- a - 2%
- b - 8%
- c - 16%
- d - 50%
- e - 85%

2023 Session 2**Exercice 2**

Dans Paris, hors période de grève, la moitié des camions-bennes à ordures (appelés bennes par la suite) est gérée par la mairie et l'autre moitié par des prestataires privés. On note X_n le nombre de bennes gérées par la mairie parmi n bennes prises au hasard ($n \geq 1$). Le nombre total de bennes est suffisamment grand pour considérer que les bennes sont tirées au sort indépendamment avec remise.

Question n°5 On s'intéresse à la gestion des bennes. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 0,5$
- B. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $\pi = 0,5$ et $n = 1$
- C. $P(X_3 = 2) = 0,25$
- D. La variance de X_{10} vaut 2,5
- E. $P(X_{10} \geq 6) > P(X_{10} < 5)$

2022 Session 2

Question n°10 Pour des raisons logistiques, on attend plusieurs prélèvements avant de faire les dosages de la protéine P. La probabilité qu'un prélèvement ait été conservé trop longtemps à température ambiante et soit donc ininterprétable est de 10%. On décide d'analyser 20 prélèvements. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. La probabilité qu'aucun prélèvement soit ininterprétable est nulle
- B. La probabilité qu'exactement la moitié des prélèvements soit ininterprétable est nulle
- C. La probabilité qu'au moins un prélèvement soit ininterprétable est de 0,27 (à 0,01 près)
- D. La probabilité qu'au moins deux prélèvements soient ininterprétables est de 0,60 (à 0,01 près)
- E. La probabilité qu'aucun prélèvement soit ininterprétable dépend du nombre total de prélèvements analysés

2021 Session 2

Dans une salle fermée, une personne contaminante à 25% de risques de transmettre la maladie *I* à chacune des personnes présentes une heure dans la même salle et naïves de l'infection (n'ayant jamais été infectée). Une réunion est organisée pendant 1 heure dans une salle avec 6 personnes dont une seule est contaminante et les 5 autres sont naïves. On considère que les transmissions potentielles entre personnes sont indépendantes.

Question n°7 Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte à 0,01 près ?

La probabilité qu'au moins une des personnes naïves soit contaminée vaut :

- A. 0,82
- B. 0,76
- C. 0,68
- D. 0,63
- E. 0,60