

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Calcul intégral et équations différentielles

CORRIGE

TABLEAU DE REPONSES

2023	2022	2020	2018	2017	2016	2014	2012	2011
Q2 : ACDE	Q1 : ABDE	Q14 : BC	Q10 : A	Q10 : C	Q10 : BCD	Q13 : BC	Q13 : AC	Q14 : BC
	Q2 : C	Q15 : C		Q11 : B	Q11 : C		Q14 : BD	
					Q12 : B		Q15 : BC	
							Q18 : ACD	

ANNALES CLASSEES CORRIGÉES SUPPLEMENTAIRES

2023 Session 2	2022 Session 2	2021 Session 2
Q1 : ACD	Q1 : ABE	Q1 : B
	Q4 : A	Q2 : BCE
		Q3 : ABCE

2023

Question n°2

A. VRAI D. VRAI

On peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$y'(t) - ky(t) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre et dont la solution est :

$$y(t) = Ke^{kt}; K \in \mathbb{R}$$

D'après la condition initiale :

$$y(0) = 100 \text{ or } y(0) = Ke^{k \cdot 0} = K \\ \rightarrow K = 100$$

On obtient :

$$y(t) = 100e^{\frac{t}{2}}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B. FAUX

L'équation différentielle (1) est une équation différentielle **linéaire** du premier ordre **sans second membre**.

C. VRAI

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 100e^{\frac{t}{2}} = +\infty$$

E. VRAI

D'après le formulaire, le développement limité au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \text{reste}$$

A l'ordre 2, on obtient : $100e^{t/2} = 100 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} \right) = 100 + 50t + 12,5t^2$

Question n°1

A VRAI B VRAI C FAUX

$$y'(t) = k \left(a - \frac{y(t)}{2} \right) \rightarrow y'(t) + \frac{k}{2} y(t) = ka$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire **d'ordre 1** (dérivée première) **avec second membre** (ka).

D VRAI

$$y'(t) = k \left(a - \frac{y(t)}{2} \right) \rightarrow \frac{y'(t)}{\left(a - \frac{y(t)}{2} \right)} = k$$

On reconnaît une équation différentielle à variables séparables : $y' f(y) = g(t)$.

E VRAI

D'après l'équation, on a par analyse dimensionnelle :

$$[y'(t)] = [k][y(t)]$$

Or

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

k a la dimension de $1/t$. On en déduit l'unité de k : jour^{-1}

Question n°2

Réponse : C

$$y_0'(t) = -\frac{ky_0(t)}{2} \rightarrow y_0'(t) + \frac{ky_0(t)}{2} = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (dérivée première) sans second membre.

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre et dont la solution est :

$$y_0(t) = Ce^{-\frac{kt}{2}}; C \in \mathbb{R}$$

2023 Session 2

Question n°1

$$y'(t) = -sy(t) + sAe^{-2st} \rightarrow y'(t) + sy(t) = sAe^{-2st}$$

A. Vrai

L'équation est composée de termes linéaires.

B. Faux

Seule la dérivée première de $y(t)$ apparaît il s'agit d'une équation du premier ordre.

C. Vrai

sAe^{-2st} correspond au second terme.

D. Vrai

Les coefficients devant les termes en $y(t)$ et $y'(t)$ sont constants.

E. Faux

On dit qu'une équation différentielle est d'ordre n ($n \geq 1$) si les dérivées vont jusqu'à l'ordre n de dérivation dans cette équation.

2022 Session 2

Question n°1

A. Vrai B. Vrai

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 \rightarrow N'(t) - \alpha_0 N(t) = -nM_0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire **d'ordre 1** (dérivée première) **avec second membre** ($-nM_0$).

C. Faux

L'évolution du nombre de bactéries $N(t)$ dépend de M_0 .

D. Faux

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0$$

D'après l'équation, $N'(t)$ correspond à la différence de deux termes positifs, il peut être positif ou négatif en fonction de la valeur des différents paramètres.

E. Vrai

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0$$

$$\rightarrow \frac{N'(t)}{\alpha_0 N(t) - nM_0} = 1$$

On reconnaît une équation différentielle à variables séparables : $y'f(y) = g(t)$.

Question n°4

Réponse : A

L'équation sans second membre s'écrit :

$$N'(t) - \alpha_0 N(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire **d'ordre 1** dont la solution est :

$$N(t) = Ce^{\alpha_0 t}; C \in \mathbb{R}$$

2021 Session 2

Question n°1

Réponse : B

La variation de la concentration de médicament dans le système digestif correspond à son élimination par absorption.

$$x'(t) = -k_a x(t)$$

La variation de la concentration de médicament dans le sang correspond à son apparition par absorption et à son élimination via son passage dans les reins.

$$y'(t) = +k_a x(t) - k_e y(t)$$

Question n°2

A Faux

$$x'(t) = -k_a x(t) \rightarrow x'(t) + k_a x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire **d'ordre 1** (dérivée première) **sans second membre** et dont la solution s'écrit :

$$x(t) = K e^{-k_a t}$$

D'après l'énoncé,

$$x(0) = w \rightarrow x(t) = w e^{-k_a t}$$

B Vrai E Vrai

$$x'(t) = -k_a w e^{-k_a t} < 0$$

La fonction est strictement décroissante et monotone.

C Vrai

$$x''(t) = k_a^2 w e^{-k_a t} > 0$$

D Faux

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Question n°3

A Vrai B Vrai

Au maximum, la dérivée est nulle :

$$\begin{aligned} y(t) &= 3(e^{-t} - e^{-3t}) \rightarrow y'(t) = 3(-e^{-t} + 3e^{-3t}) = 0 \\ &\rightarrow 3e^{-3t} = e^{-t} \\ &\rightarrow 3 = e^{2t} \\ &\rightarrow t = \frac{\ln 3}{2} = 0,55 \text{ h} = 33 \text{ min} \end{aligned}$$

C Vrai

$$y\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 3\left(e^{-\frac{\ln 3}{2}} - e^{-3\frac{\ln 3}{2}}\right) = 1,15 \text{ mg/L}$$

D Faux

$$y'(t) = 3(-e^{-t} + 3e^{-3t}) = 3e^{-t}(3e^{-2t} - 1)$$

E Vrai

Une concentration est une donnée positive.

A la suite des questions 1 et 2, on aboutissait à $x(t) = w e^{-k_a t}$:

$$x\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 2e^{-3\frac{\ln 3}{2}} = 0,38 \text{ mg/L}$$