

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Calcul intégral et équations différentielles

SUJET

2023

Exercice 1

On étudie la population de bactéries qui évolue au cours du temps. Le temps t en jour est positif ou nul. Le nombre de bactéries est exprimé en UFC/L (Unité Formant Colonie par Litre). Ce nombre en fonction du temps est noté $y(t)$.

Question n°2 On modélise l'évolution de $y(t)$ par l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = ky(t) \quad \text{Équation différentielle (1)}$$

où $k = 0,5 \text{ jour}^{-1}$ et $y(0) = 100 \text{ UFC/L}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. La fonction $y(t)$ est croissante
- B. L'équation différentielle (1) est une équation d'ordre 1 non-linéaire avec second membre
- C. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$
- D. La solution de l'équation différentielle (1) est $y(t) = 100e^{t/2} \text{ UFC/L}$
- E. Au voisinage de l'origine, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, on peut approximer $100e^{t/2}$ par $100 + 50t + 12,5t^2$

2022

Exercice 1

Des valeurs faibles de la concentration corpusculaire moyenne en hémoglobine (CCMH, mesurée en g/dL) peuvent permettre de détecter une anémie avec carence en fer. Le traitement classique est une supplémentation S en fer. Le temps $t = 0$ correspond au début de ce traitement S et on note $y(t)$ la différence de CCMH entre celle mesurée au temps t et celle mesurée en $t = 0$. Le temps t (en jour) est positif ou nul et $y(0) = 0$. $y(t)$ évolue selon l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = k \left(a - \frac{y(t)}{2} \right) \quad \text{Equation différentielle (1)}$$

où k et a sont des constantes réelles strictement positives, l'unité de la constante a est g/dL.

Question n°1 On s'intéresse à l'équation différentielle (1). Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. L'équation différentielle (1) est une équation différentielle linéaire
- B. L'équation différentielle (1) est une équation différentielle avec second membre
- C. L'équation différentielle (1) est une équation différentielle d'ordre 2
- D. L'équation différentielle (1) est une équation différentielle à variables séparables
- E. L'unité de la constante k est $(\text{jour})^{-1}$.

Question n°2 Avant de résoudre l'équation différentielle (1), on résout l'équation différentielle (2) suivante pour la recherche de la solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$y_0'(t) = -\frac{ky_0(t)}{2} \quad \text{Equation différentielle (2)}$$

Parmi les propositions suivantes, où C est une constante réelle, **laquelle** est exacte?

- A. La solution de l'équation différentielle (2) est $y_0(t) = -\frac{ky_0(t)t}{2} + C$
- B. La solution de l'équation différentielle (2) est $y_0(t) = e^{-\frac{kt}{2}} + C$
- C. La solution de l'équation différentielle (2) est $y_0(t) = Ce^{-\frac{kt}{2}}$
- D. La solution de l'équation différentielle (2) est $y_0(t) = C \ln\left(\left|\frac{kt}{2}\right|\right)$
- E. La solution de l'équation différentielle (2) est $y_0(t) = -\frac{kt}{2} + C$

2020

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On s'intéresse maintenant à la résolution de l'équation différentielle :

$$x'(t) = \frac{-qx(t)}{k+x(t)} \quad \text{équation (3)}$$

pour $t > 0$. Les constantes q et k sont strictement positives. On suppose $x(t) > 0, \forall t > 0$.

Pour les questions 14 et 15, $x(t)$ et $x'(t)$ seront notées respectivement x et x' .

➤ Question 14

On s'intéresse à l'équation différentielle définie par l'équation (3).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$$\forall k > 0, \quad \forall q > 0, \quad \forall t > 0$$

- A) L'équation (3) est une équation différentielle linéaire.
- B) L'équation (3) est une équation différentielle à variables séparables.
- C) On peut réécrire l'équation (3) sous la forme $dt = -\frac{k+x}{qx} dx$
- D) On peut réécrire l'équation (3) sous la forme $dt = -\frac{qx}{k+x} dx$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 15**

La résolution de l'équation différentielle définie par l'équation (3) conduit à l'expression du temps t en fonction de x .

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

$$\forall k > 0, \quad \forall q > 0, \quad \forall t > 0$$

- A) On obtient $t = -qx + qk \ln(k+x) + Cte$ où Cte est une constante d'intégration
- B) On obtient $t = -qx - qk \ln(k+x) + Cte$ où Cte est une constante d'intégration
- C) On obtient $t = -\frac{k}{q} \ln x - \frac{x}{q} + Cte$ où Cte est une constante d'intégration
- D) On obtient $t = -\frac{k}{q} \ln x + \frac{x}{q} + Cte$ où Cte est une constante d'intégration
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

2018

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On considère un réacteur chimique dans lequel un réactif subit une transformation chimique. Un flux continu apporte une solution contenant ce réactif dans le réacteur et un autre flux continu évacue une solution contenant les produits de la réaction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'évolution de la concentration de ce réactif peut être décrite par l'équation différentielle

$$f'(t) = \frac{1}{\theta} (c_1 - f(t)) - kf(t) \quad \forall t > 0 \quad (1)$$

où $f(t)$ est la concentration de ce réactif dans le réacteur en fonction du temps t . c_1 est la concentration de ce réactif dans le flux d'entrée, θ et k sont des paramètres réels strictement positifs, caractéristiques du réacteur et de la réaction chimique. La concentration c_1 sera soit fixée à une valeur constante (questions 10 à 13), soit exprimée en fonction du temps t (question 14). Toutes les concentrations sont exprimées en mM.

➤ **Question 10**

On résout l'équation différentielle (1) avec $c_1 = 0$ mM.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution générale est $f(t) = Ae^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- B) La solution générale est $f(t) = Ae^{-10\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- C) La solution générale est $f(t) = A + e^{\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- D) La solution générale est $f(t) = A + e^{\left(\frac{\theta}{k\theta+1}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Dans cet exercice, on étudie deux modèles de dissolution de comprimés : les questions 10 à 12 concernent le modèle de Weibull et les questions 13 à 15 celui de Korsmeyer-Peppas.

Dans les deux cas, on s'intéresse à la fraction de comprimé dissoute en un temps donné. La fonction qui décrit cette fraction dissoute sera notée f pour le premier modèle (questions 10 à 12) et g pour le deuxième modèle (questions 13 à 15).

Dans les deux cas, on considère uniquement des temps positifs. La mesure de la dissolution du comprimé commence en $t = 0$ quand celui-ci est introduit avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. De plus, les fonctions f et g sont continues à droite en $t = 0$.

➤ Question 10

Selon le modèle de Weibull, la fonction f satisfait l'équation différentielle :

$$f'(t) = a b t^{b-1} (1 - f(t)) \quad \forall t > 0$$

où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

Le temps est exprimé en minutes (min), la constante b est sans unité, la constante a est exprimée en min^{-b} .

On résout cette équation par la méthode de séparation de variables, en appliquant la condition initiale $f(0) = 0$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $f(t) = at^b \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- B) $f(t) = -1 + e^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- C) $f(t) = 1 - e^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- D) $f(t) = a - ae^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 11

Afin de calculer l'efficacité de la dissolution, on a besoin de calculer l'aire sous la courbe de f (solution de la question 10) entre le temps $t = 0$ et un temps t_0 strictement positif.

Calculez cette aire (notée A) lorsque $b = 1$, $a > 0$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $A = \int_0^{t_0} f(t) dt = t_0 - \frac{1}{a} e^{-at_0} \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- B) $A = \int_0^{t_0} f(t) dt = t_0 - \frac{1}{a} (1 - e^{-at_0}) \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- C) $A = \int_0^{t_0} f(t) dt = \frac{1}{2} at_0^2 \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- D) $A = \int_0^{t_0} f(t) dt = at_0 - 1 + e^{-at_0} \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On souhaite élaborer un modèle simplifié de l'équilibre entre les formes dimérique et monomérique d'une protéase de rétrovirus.

Dans un premier temps, on étudie la dissociation du dimère D vers deux monomères M, selon la réaction : $D \rightarrow 2M$

On note $y(t)$ la concentration en fonction du temps t du monomère M. Au cours de la réaction, cette concentration $y(t)$ du monomère M évolue selon l'équation différentielle 1 :

$$\text{Équation différentielle 1} \quad y'(t) = k_1 \left(3 - \frac{y(t)}{2} \right)$$

où k_1 est une constante réelle strictement positive et la valeur 3 correspond à la concentration initiale en $t = 0$ du dimère D.

➤ **Question 10**

On s'intéresse à l'équation différentielle 1. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) L'équation différentielle 1 est une équation différentielle linéaire sans second membre.
- B) L'équation différentielle 1 est une équation différentielle linéaire avec second membre.
- C) L'équation différentielle 1 est une équation différentielle d'ordre 1.
- D) L'équation différentielle 1 est une équation différentielle à variables séparables.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 11**

Avant de résoudre l'équation différentielle 1, nous allons d'abord résoudre l'équation différentielle 2 suivante :

$$\text{Équation différentielle 2} \quad y'(t) = -\frac{k_1 y(t)}{2}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution de l'équation différentielle 2 est $y(t) = -\frac{k_1 y(t)t}{2} + C$ où C est une constante réelle.
- B) La solution de l'équation différentielle 2 est $y(t) = e^{\frac{k_1 t}{2}} + C$ où C est une constante réelle.
- C) La solution de l'équation différentielle 2 est $y(t) = Ce^{-\frac{k_1 t}{2}}$ où C est une constante réelle.
- D) La solution de l'équation différentielle 2 est $y(t) = C \ln \left| -\frac{k_1 t}{2} \right|$ où C est une constante réelle.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 12**

On résout maintenant l'équation différentielle 1, avec la condition initiale $y(0) = 0$. Après application de cette condition initiale $y(0) = 0$, parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution de l'équation différentielle 1 est $y(t) = 6k_1 - 6e^{-\frac{k_1 t}{2}}$
- B) La solution de l'équation différentielle 1 est $y(t) = 6 - 6e^{-\frac{k_1 t}{2}}$
- C) La solution de l'équation différentielle 1 est $y(t) = \frac{-k_1 y(t)t}{2} + 6$
- D) La solution de l'équation différentielle 1 est $y(t) = e^{-\frac{k_1 t}{2}} + 6$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Pour mieux dépister l'insuffisance rénale chez l'adulte, on évalue son débit de filtration glomérulaire DFG (noté Z). Pour chaque individu, cette grandeur est fonction de sa concentration en créatinine sérique (noté S), de son genre (homme, femme), de son âge (noté A) et de son origine ethnique. Dans tout cet exercice nous traiterons de données obtenues chez des femmes de type ethnique « caucasien ». Dans la première partie, on dispose de données provenant de femmes, du même âge. Dans la deuxième partie, l'âge sera considéré comme variable.

Première Partie :

Pour des femmes caucasiennes du même âge on peut écrire :

$$Z = K \times (0,011 S)^\alpha \quad (\text{équation 1})$$

Les valeurs obtenues pour K et α sont exprimées sans unité, Z est exprimé en $\text{mL} \cdot \text{min}^{-1}$, S est exprimé en $\mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

➤ **Question 13**

On calcule la valeur moyenne du débit de filtration glomérulaire Z_{moy} pour un intervalle de concentration sanguine de créatinine S de 40 à 80 $\mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) $Z_{\text{moy}} = \int_{40}^{80} K \times (0,011 S)^\alpha dS$

B) $Z_{\text{moy}} = \frac{1}{40} \int_{40}^{80} K \times (0,011 S)^\alpha dS$

C) $Z_{\text{moy}} = \frac{K \times (0,011)^\alpha}{40} \left[\frac{S^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{40}^{80}$

D) $Z_{\text{moy}} = \frac{K \times (0,011)^{\alpha+1}}{40} \left[\frac{S^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{40}^{80}$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte

Exercice 3 (Questions 13 à 18)

L'étude de stabilité et le test de dissolution sont deux procédures qui permettent de caractériser un médicament sous forme de comprimé et feront l'objet de cet exercice. Ces études reposent sur des méthodes analytiques spécifiques de la molécule active. Les études de stabilité (questions 13, 14, 15, 16 et 17) ont pour but de déterminer le délai pendant lequel le comprimé pourra être utilisé avec efficacité et sécurité. Les tests de dissolution (question 18) permettent de mesurer l'aptitude du comprimé à laisser passer en solution la molécule active.

Etude de stabilité :

On note $Q(t)$ la quantité de molécule active au temps t , dans une masse de comprimé supposée constante, et Q_0 cette quantité au temps $t=0$, c'est-à-dire que $Q_0 = Q(0)$.

On appelle V la vitesse de dégradation de la molécule active soit $v = \frac{dQ}{dt}$. On pose

$V(t) = -k [Q(t)]^n$ où k est la constante de dégradation strictement positive et n est l'ordre de la réaction de dégradation.

➤ Question 13

On cherche un modèle mathématique de la fonction $Q(t)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) Si la réaction est d'ordre 0 le graphe de $Q(t)$ est une droite de pente $-k$.
- B) Si la réaction est d'ordre 1 on obtient pour $Q(t)$ une fonction exponentielle $Q(t) = Q_0 e^{kt}$
- C) Si la réaction est d'ordre 1 on obtient après transformation logarithmique de $Q(t)$ l'équation d'une droite de pente $-k$
- D) Si la réaction est d'ordre 2, on obtient $-\frac{1}{Q(t)} = kt + \frac{1}{Q_0}$
- E) Si la réaction est d'ordre 2, le graphe de $Q(t)$ est celui d'un polynôme de degré 2.

➤ **Question 14 : On suit le taux de dégradation de la molécule active.**

La vitesse de dégradation est d'ordre 1 et on prend pour k la valeur $3 \cdot 10^{-4} \text{ jour}^{-1}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

Aides au calcul après arrondis : $e^{-3} \approx 0,05$; $e^3 \approx 20$; $\ln(0,2) \approx -1,6$; $\ln 2 \approx 0,7$

- A) Entre les temps $t = 0$ et $t = 10^4$ jours, la quantité de molécule active est passée de Q_0 à $\frac{Q_0}{3}$
- B) Au bout d'un temps $t = 10^4$ jours, la quantité restante est de 5% de la quantité initiale
- C) Au bout d'un temps $t = 10^4$ jours, la quantité restante est de 95% de la quantité initiale
- D) Le temps au bout duquel la quantité de molécule active est de 20% de la quantité initiale est supérieur à 10 ans
- E) Le temps au bout duquel la quantité de molécule active est de 20% de la quantité initiale est inférieur à 10 ans

➤ **Question 15 : On étudie la quantité moyenne de molécule active dans un intervalle de temps de 0 à 1000 jours.**

La vitesse de dégradation est d'ordre 1 et on prend pour k la valeur $3 \cdot 10^{-4} \text{ jour}^{-1}$. Le résultat sera exprimé en fonction de Q_0 .

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

Aides au calcul après arrondis : $\exp(-0,3) \approx 0,74$; $\exp(0,3) \approx 1,35$; $0,26/3 \approx 0,087$; $0,74/3 \approx 0,25$

A) Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ on évalue le résultat de $\frac{1}{b-a} \int_a^b t f(t) dt$

B) Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ on évalue le résultat de $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

- C) La quantité moyenne dans un intervalle de temps de 0 à 1000 jours est de $0,87Q_0$.
- D) La quantité moyenne dans un intervalle de temps de 0 à 1000 jours est de $0,25Q_0$.
- E) La quantité moyenne dans un intervalle de temps de 0 à 1000 jours est de $0,087Q_0$.

Test de dissolution : Dans cette question on étudie la vitesse de dissolution du médicament, en milieu aqueux. On appellera $M(t)$ la quantité de molécule active non dissoute au temps t et M_0 sa quantité initialement présente au temps $t = 0$.

On appliquera le modèle suivant pour des temps t strictement positifs : $\frac{dM}{dt} = -\sigma \phi(t) M$.

Dans cette expression, σ représente la probabilité que présente la molécule active de se dissoudre par unité de temps, on posera σ constante ; $\phi(t)$ représente les facteurs physico-chimiques qui peuvent modifier cette dissolution.

➤ **Question 18**

On propose ici un modèle où $\phi(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ où λ est une constante strictement positive.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

Aides aux calculs après arrondis : $e^{-3} \approx 0,05$; $e^3 \approx 20$; $e^{-0,615} \approx 0,54$; $e^{0,615} \approx 1,85$

A) On peut vérifier que $\phi(0) = 0$, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 1$, que $\phi(t) > 0$ pour $t > 0$ et que $M(t)$ est une fonction décroissante du temps.

B) On peut vérifier que $\phi(0) = 0$, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = -1$, que $\phi(t) < 0$ pour $t > 0$ et que $M(t)$ est une fonction décroissante du temps.

C) On trouve $M(t) = M_0 \exp \left[-\sigma \left(t - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right) \right]$

D) On pose $\sigma = 0,3 \text{ min}^{-1}$ et $\lambda = 1$.

Au bout de 3 minutes, la quantité de molécule active non dissoute est supérieure à la moitié de la quantité initiale de molécule active.

E) On pose $\sigma = 0,3 \text{ min}^{-1}$ et $\lambda = 1$.

Au bout de 3 minutes, la quantité de molécule active non dissoute est inférieure à la moitié de la quantité initiale de molécule active.

Exercice 3 (Questions 13 à 18)

Cet exercice se rapporte à l'étude de la croissance microbienne.

Cette croissance est caractérisée soit par l'évolution, au cours du temps t , de la masse des micro-organismes par unité de volume ou biomasse, notée $B(t)$, soit par le taux de croissance, toujours strictement positif, noté θ .

A partir de la question 14, on propose des modélisations du taux de croissance θ . Celui-ci sera d'abord considéré comme une constante (question 14), puis comme une fonction de la concentration S en substrat nutritif (questions 15 à 18).

S et B s'expriment tous deux en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, le temps s s'exprime en minutes (min).

➤ Question 14

Le modèle de croissance le plus simple proposé est le suivant : $\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \theta$ (équation 1) et on sait qu'en $t = 0$, la biomasse à l'origine $B(0)$ vaut $1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) L'unité de θ est $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
- B) Par intégration de l'équation 1 on obtient une croissance exponentielle pour $B(t)$.
- C) Les fonctions logarithme et exponentielle, exprimées dans une même base, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- D) La constante d'intégration vaut $10 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
- E) Le temps de doublement de la biomasse vaut $\frac{\theta}{\ln 2}$

2023 Session 2

Exercice 1

Un médicament est ingéré par voie orale. On note $y(t)$ la concentration en mg/L de ce médicament dans le sang en fonction du temps t . Le temps t en heure est positif ou nul.

Pour décrire l'évolution de la concentration, on propose le modèle suivant :

$$y'(t) = -sy(t) + sAe^{-2st} \quad \forall t > 0 \quad \text{Équation différentielle (1)}$$

avec $A > 0$ et $s > 0$. La constante s s'exprime en h^{-1} et la constante A en mg/L. Les valeurs des constantes sont choisies de sorte que la concentration $y(t)$ soit toujours positive ou nulle.

Question n°1 On s'intéresse à l'équation différentielle (1). Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. L'équation différentielle (1) est une équation linéaire
- B. L'équation différentielle (1) est une équation d'ordre 2
- C. L'équation différentielle (1) est une équation avec second membre
- D. L'équation différentielle (1) est une équation différentielle à coefficients constants
- E. On dit qu'une équation différentielle est d'ordre n ($n \geq 1$) si les dérivées vont jusqu'à l'ordre $n + 1$ de dérivation dans cette équation.

Exercice 1

On s'intéresse au nombre de bactéries en fonction du temps, $N(t)$, pour une population comportant N_0 bactéries à $t = 0$ ($N_0 > 0$). Le taux de croissance bactérienne, noté α_0 , est constant au cours du temps car la division des bactéries est supposée instantanée. En réponse à l'infection, les bactéries sont combattues par des macrophages. Pour décrire l'évolution de la population bactérienne, on considère que le nombre des macrophages, noté M_0 , est constant au cours du temps et qu'un macrophage est capable de tuer n bactéries par unité de temps. La vitesse de disparition des bactéries du fait des macrophages est égale à nM_0 .

Pour décrire l'évolution de la population bactérienne, on propose le modèle suivant :

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 \quad \forall t > 0 \text{ équation (1)}$$

avec $\alpha_0 > 0$, $n > 0$ et $M_0 > 0$.

Question n°1 On s'intéresse à l'équation (1). Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. L'équation (1) est une équation différentielle à coefficients constants avec second membre
- B. L'équation (1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1
- C. L'évolution du nombre de bactéries n'est pas fonction du nombre de macrophages
- D. La dérivée $N'(t)$ est strictement inférieure à 0 $\forall t > 0, \forall \alpha_0 > 0, \forall n > 0$ et $\forall M_0 > 0$
- E. L'équation (1) est une équation différentielle à variables séparables

Pour les questions 4 et 5, on considère maintenant qu'en réponse à l'infection, le nombre de macrophages augmente exponentiellement. Le nombre de macrophages en fonction du temps est notée $M(t) = M_0 e^{\alpha_m t}$ où α_m est une constante réelle strictement positive différente de α_0 . La condition initiale et la constante N_1 sont identiques à savoir $N(0) = N_0 > 0$ et $N_1 = \frac{nM_0}{\alpha_0}$.

L'équation (1) devient dans ce cas :

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 e^{\alpha_m t} \quad \forall t > 0 \quad \text{équation (2)}$$

avec $\alpha_0 > 0, \alpha_m > 0, \alpha_0 \neq \alpha_m, n > 0$ et $M_0 > 0$.

Question n°4 On s'intéresse à la solution générale de l'équation sans second membre correspondant à l'équation (2). Parmi les propositions suivantes, où C est une constante, laquelle est exacte ?

La solution générale de l'équation sans second membre correspondant à l'équation (2) est :

- A. $N(t) = Ce^{\alpha_0 t}$
- B. $N(t) = Ce^{\alpha_0 t} - N_0$
- C. $N(t) = Ce^{\alpha_0 t} + N_0$
- D. $N(t) = Ce^{\alpha_0 t} - N_1$
- E. $N(t) = Ce^{\alpha_0 t} + N_1$

2021 Session 2

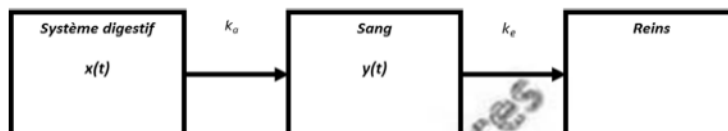
Exercice 1

Un médicament est administré par voie orale en une seule prise. Dans le cadre de cet exercice, on considérera que ce médicament passe par le système digestif puis dans le sang et est éliminé par filtration rénale comme illustré sur le graphique ci-dessous.

La vitesse d'absorption est proportionnelle à la concentration de médicament présente dans le système digestif avec un coefficient de proportionnalité égal à k_a (exprimé en h^{-1}). La vitesse d'élimination est proportionnelle à la concentration présente dans le sang avec un coefficient de proportionnalité égal à k_e (exprimé en h^{-1}).

$x(t)$ est la concentration de médicament dans le système digestif en fonction du temps t et $y(t)$ est la concentration de médicament dans le sang en fonction du temps t . En $t = 0$, la concentration de médicament dans le système digestif vaut w mg/L et est nulle dans le sang.

Les paramètres w , k_a et k_e sont strictement positifs avec $k_a > k_e$. Le temps t (en heures) est positif ou nul.



On note l'équation (1) celle modélisant l'évolution de la concentration de médicament dans le système digestif et l'équation (2) celle modélisant l'évolution de la concentration de médicament dans le sang.

Question n°1 On s'intéresse à l'expression des deux équations (1) et (2). Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte ?

- A. $\begin{cases} x'(t) = +k_a x(t) \\ y'(t) = +k_a x(t) - k_e y(t) \end{cases}$ équation (1)
équation (2)
- B. $\begin{cases} x'(t) = -k_a x(t) \\ y'(t) = +k_a x(t) - k_e y(t) \end{cases}$ équation (1)
équation (2)
- C. $\begin{cases} x'(t) = -k_a x(t) \\ y'(t) = +k_e x(t) - k_a y(t) \end{cases}$ équation (1)
équation (2)
- D. $\begin{cases} x'(t) = -k_a x(t) \\ y'(t) = -k_a x(t) + k_e y(t) \end{cases}$ équation (1)
équation (2)
- E. $\begin{cases} x'(t) = +k_a x(t) \\ y'(t) = +k_e x(t) - k_a y(t) \end{cases}$ équation (1)
équation (2)

Question n°2 On s'intéresse à la fonction $x(t)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. $x(t) = we^{k_a t}$
- B. La fonction $x(t)$ est monotone
- C. La fonction $x(t)$ est convexe
- D. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on trouve que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$
- E. La fonction $x(t)$ est strictement décroissante

Question n°3 Pour cette question, on fixe $w = 2 \text{ mg/L}$, $k_a = 3 \text{ h}^{-1}$ et $k_e = 1 \text{ h}^{-1}$. La fonction $y(t)$ vaut dans ce cas :

$$y(t) = 3(e^{-t} - e^{-3t})$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Le temps pour atteindre la concentration maximale de médicament dans le sang est inférieur à 45 minutes
- B. Le temps pour atteindre la concentration maximale de médicament dans le sang est supérieur à 15 minutes
- C. La valeur de la concentration maximale de médicament dans le sang est inférieure à 3 mg/L
- D. $y'(t) = 3e^{-t}(3e^{-2t} + 1)$
- E. Au moment où la concentration de médicament dans le sang est maximale, la concentration dans le système digestif est strictement positive