

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Calcul intégral et équations différentielles
(partie 2)

CORRIGE

TABLEAU DE REPONSES

2023	2022	2021	2018	2017	2016	2015	2013
Q4 : BDE	Q3 : ACE	Q1 : AE	Q10 : A	Q10 : C	Q14 : B	Q12 : AD	Q13 : BC
Q5 : ACDE		Q2 : ADE	Q11 : B	Q11 : B	Q15 : C		Q14 : AC
		Q4 : BCD	Q12 : AC				
			Q13 : A				
			Q14 : C				

ANNALES CLASSEES CORRIGÉES SUPPLEMENTAIRES

2023 Session 2	2022 Session 2
Q2 : B	Q2 : D
Q3 : AC	Q3 : ACE
Q5 : B	Q5 : ABCD

Question n°4

B. VRAI C. FAUX

On peut écrire l'équation (2) sous la forme :

$$z'(t) - kz(t) = -m + nt$$

L'équation différentielle (2) est une équation différentielle **linéaire** du premier ordre **avec second membre**.

A. FAUX

Le second membre s'écrit sous la forme d'un polynôme de degré 1. D'après le formulaire, la solution de l'équation particulière correspond dans ce cas à un **polynôme de degré 1**.

$$z_p(t) = A + Bt ; (A, B) \in \mathbb{R}$$

D. VRAI

La solution de l'équation homogène est de la forme :

$$z_H(t) = Ke^{kt}, K \in \mathbb{R}$$

La solution de l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$z(t) = Ke^{kt} + A + Bt$$

On injecte la solution particulière dans l'équation différentielle :

$$B - k(A + Bt) = -m + nt$$

Par identification, on a :

$$B - kA = -m \text{ et } -kB = n$$

Soit avec les valeurs numériques de l'énoncé :

$$B - 0,5.A = -50 \text{ et } -0,5.B = 10$$

On en déduit $B = -20$ et $A = 60$.

A l'aide de la condition initiale, on a :

$$z(0) = 100 = K + A$$

On en déduit $K = 40$.

La solution de l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$z(t) = Ke^{kt} + A + Bt \rightarrow z(t) = 40e^{t/2} + 60 - 20t$$

E. VRAI

$$z(t) = 40e^{\frac{t}{2}} + 60 - 20t \rightarrow z'(t) = 20e^{\frac{t}{2}} - 20$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'ensemble des réels, de plus $z'(0) = 0$.

On en déduit que $\forall t \in [0; 5], z'(t) \geq 0$: la fonction z est croissante sur $[0; 5]$.

Question n°5

A. VRAI

Soit la fonction moyenne :

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \rightarrow \text{moy} = \frac{1}{5} \int_0^5 z(t) dt$$

B. FAUX

$$AUC_2 = \int_0^5 z(t) dt$$

C. VRAI

$$AUC_2 = \int_0^5 z(t) dt = \int_0^5 (-20t + 40e^{t/2} + 60) dt = [-10t^2 + 80e^{t/2} + 60t]_0^5$$

D. VRAI

$$\text{moy} = \frac{1}{5} \int_0^5 z(t) dt = \frac{AUC_2}{5}$$

$$AUC_2 = [-10t^2 + 80e^{t/2} + 60t]_0^5 = (-10 \times 5^2 + 80e^{5/2} + 60 \times 5) - 80 = -30 + 80e^{5/2}$$

$$\rightarrow \text{moy} = \frac{AUC_2}{5} = -6 + 16e^{5/2}$$

E. VRAI

Le bactéricide ralentit la croissance de la population, on en déduit $AUC_1 > AUC_2$.

D'après la question 1, $AUC_1 \approx 2250$ et d'après la question 5B et 5D, $AUC_2 \approx 945$.

Question n°3

A VRAI

On cherche la solution particulière pour laquelle la dérivée première est nulle :

$$y'(t) + \frac{k}{2}y(t) = ka \rightarrow \frac{k}{2}y(t) = ka \rightarrow y(t) = 2a$$

On en déduit :

$$y(t) = 2a + Ce^{-\frac{kt}{2}}$$

$$y(0) = 2a + C = 0 \rightarrow C = -2a$$

On obtient :

$$y(t) = 2a - 2ae^{-\frac{kt}{2}}$$

B FAUX

$$y'(t) = ak \cdot e^{-\frac{kt}{2}} > 0$$

Il s'agit d'une fonction croissante.

C VRAI

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2a - 2ae^{-\infty} = 2a$$

D FAUX E VRAI

A l'aide du formulaire, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \text{reste}$$

Ordre 1 :

$$e^{-\frac{kt}{2}} = 1 - \frac{kt}{2}$$

Ordre 2 :

$$e^{-\frac{kt}{2}} = 1 - \frac{kt}{2} + \frac{k^2 t^2}{8}$$

Question n°1

A. Vrai B. Faux

« Transformation avec un taux b ». On a $b > 0$.

« Quantité de larves ingérées noté m ». On a $m > 0$.

C. Faux

« Mourir avec un taux k ». On a $k > 0$.

D. Faux

D'après l'équation (2) :

$$A'(t) = bL(t) - kA(t)$$

L et A dépendent l'un de l'autre.

E. Vrai

D'après l'énoncé $L(0) = 0$. A l'aide de l'équation (1), on a :

$$L'(t) = m - bL(t) \rightarrow L'(0) = m - bL(0) = m$$

Question n°2

A. Vrai

$$L'(t) = m - bL(t) \rightarrow L'(t) + bL(t) = m$$

On identifie une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Solution de l'équation générale :

$$L(t) = Ke^{-bt}$$

Solution de l'équation particulière :

$$L(t) = \frac{m}{b}$$

Solution globale :

$$L(t) = Ke^{-bt} + \frac{m}{b}$$

A l'aide des conditions initiales :

$$L(0) = Ke^{-b \times 0} + \frac{m}{b} = 0 \rightarrow K = -\frac{m}{b}$$

On obtient :

$$L(t) = -\frac{m}{b}e^{-bt} + \frac{m}{b} = \frac{m}{b}(1 - e^{-bt})$$

B. Faux

$$L(t) = \frac{m}{b}(1 - e^{-bt})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m}{b}(1 - e^{-\infty}) = \frac{m}{b}$$

C. Faux E. Vrai

$$L'(t) = me^{-bt} > 0$$

La fonction est strictement **croissante** et monotone.

D. Vrai

$$L'(t) > 0$$

La fonction dérivée ne s'annule pas, il n'existe pas de point d'inflexion.

Question n°4

A. Faux B. Vrai

$$A'(t) = bL(t) - kA(t)$$

A l'aide de la question 2, on a :

$$\rightarrow A'(t) = b \frac{m}{b} (1 - e^{-bt}) - kA(t)$$

$$\rightarrow A'(t) + kA(t) = m(1 - e^{-bt})$$

On identifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

C. Vrai

Solution de l'équation générale :

$$A(t) = Ke^{-kt}$$

D. Vrai

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{k} + \frac{m}{b-k} e^{-bt} - m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b-k} \right) e^{-kt} \right) = \frac{m}{k}$$

E. Faux

$$A(t) = \frac{m}{k} + \frac{m}{b-k} e^{-bt} - m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b-k} \right) e^{-kt}$$

$$A(0) = \frac{m}{k} + \frac{m}{b-k} - m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b-k} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \frac{m}{k}$$

La fonction A(t) ne peut pas être strictement décroissante.

2023 Session 2

Question n°2

Réponse : B

$$y'(t) + sy(t) = sAe^{-2st}$$

Pour une équation du premier ordre, la solution de l'équation homogène correspond à $Ke^{-\frac{b}{a}t}$, on obtient ainsi :

$$y_H(t) = Ke^{-st}$$

D'après le formulaire, pour un second membre de type Ke^{mx} , la solution particulière est du type Be^{mx} .

On obtient pour la solution particulière :

$$y_P(t) = Be^{-2st}$$

On injecte dans l'équation différentielle :

$$-2sBe^{-2st} + sBe^{-2st} = sAe^{-2st} \rightarrow -2sB + sB = sA \rightarrow -B = A$$

On aboutit à :

$$y_P(t) = -Ae^{-2st}$$

Question n°3

A. Vrai

D'après la question précédente :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ke^{-st} - Ae^{-2st}$$

B. Faux

Avec $y(0) = 0$:

$$Ke^{-s \cdot 0} - Ae^{-2s \cdot 0} = K - A = 0 \rightarrow K = A$$

On aboutit à :

$$y(t) = A(e^{-st} - e^{-2st})$$

On dérive :

$$y'(t) = A(-se^{-st} + 2se^{-2st}) = sAe^{-st}(2e^{-st} - 1)$$

C. Vrai

On cherche t pour $y'(t) = 0$:

$$sAe^{-st}(2e^{-st} - 1) = 0 \rightarrow 2e^{-st} - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{\ln 2}{s}$$

D. Faux E. Faux

$$y'(t) = sAe^{-st}(2e^{-st} - 1)$$

D'après l'énoncé et la définition de la fonction exponentielle : $sAe^{-st} > 0$

$(2e^{-st} - 1)$ change de signe pour $t = \frac{\ln 2}{s}$. Pour $t = 0$, $y'(0) = sAe^{-s \cdot 0}(2e^{-s \cdot 0} - 1) = sA > 0$

La fonction est croissante entre 0 et $t = \frac{\ln 2}{s}$ puis la fonction est décroissante pour $t > \frac{\ln 2}{s}$.

Question n°4

Réponse : B

A l'aide de la question 3, on a la fonction est croissante entre 0 et $t = \frac{\ln 2}{s}$ puis la fonction est décroissante pour $t > \frac{\ln 2}{s}$.

2022 Session 2

Question n°2

Réponse : D

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 \rightarrow N'(t) - \alpha_0 N(t) = -nM_0$$

Pour une équation du premier ordre, la solution de l'équation homogène correspond à $Ke^{-\frac{b}{a}t}$, on obtient ainsi :

$$y_H(t) = Ke^{\alpha_0 t}$$

On obtient pour la solution particulière :

$$y_P(t) = \frac{nM_0}{\alpha_0} = N_1$$

On aboutit à :

$$N(t) = Ke^{\alpha_0 t} + N_1$$

D'après la condition initiale :

$$\begin{aligned} N(0) = N_0 = K + N_1 &\rightarrow K = N_0 - N_1 \\ N(t) &= (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} + N_1 \end{aligned}$$

Question n°3

A. Vrai B. Faux

$$(N_0 - N_1) < 0$$

$N'(t) = \alpha_0(N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} < 0$, la fonction est strictement décroissante et monotone.
Le nombre de bactéries diminue au cours du temps.

C. Vrai

$$(N_0 - N_1) > 0$$

$N'(t) = \alpha_0(N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} > 0$, la fonction est strictement croissante et monotone.

D. Faux E. Vrai

$$N(t) = +N_1$$

Le nombre est constant au cours du temps.

Question n°5

A. Vrai

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 e^{\alpha_m t} \rightarrow N'(t) - \alpha_0 N(t) = -nM_0 e^{\alpha_m t}$$

Pour une équation du premier ordre, la solution de l'équation homogène correspond à $Ke^{-\frac{b}{a}t}$, on obtient ainsi :

$$N(t) = Ce^{\alpha_0 t}; C \in \mathbb{R}$$

D'après le formulaire, pour un second membre de type Ke^{mx} , la solution particulière est du type Be^{mx} .

On obtient pour la solution particulière :

$$N(t) = Be^{\alpha_m t}$$

B. Vrai

On injecte dans l'équation différentielle :

$$\alpha_m Be^{\alpha_m t} - \alpha_0 Be^{\alpha_m t} = -nM_0 e^{\alpha_m t} \rightarrow \alpha_m B - \alpha_0 B = -nM_0 \rightarrow B = -\frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0}$$

On en déduit :

$$N(t) = Ce^{\alpha_0 t} + Be^{\alpha_m t} = Ce^{\alpha_0 t} - \frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_m t}$$

C. Vrai

D'après la condition initiale :

$$\begin{aligned} N(0) = N_0 &= C - \frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} \\ \rightarrow C &= \frac{N_0(\alpha_m - \alpha_0) + nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$N(t) = \frac{N_0(\alpha_m - \alpha_0) + nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_0 t} - \frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_m t}$$

D. Vrai

A l'aide du formulaire, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \text{reste}$$

Ordre 1 :

$$e^{\alpha_m t} = 1 + \alpha_m t$$

E. Faux

Ordre 2 :

$$e^{\alpha_m t} = 1 + \alpha_m t + \frac{\alpha_m^2 t^2}{2}$$