

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales Classées Corrigées

Calcul intégral et équations différentielles
(partie 2)

SUJET

Exercice 1

On étudie la population de bactéries qui évolue au cours du temps. Le temps t en jour est positif ou nul. Le nombre de bactéries est exprimé en UFC/L (Unité Formant Colonie par Litre). Ce nombre en fonction du temps est noté $y(t)$.

On le mesure tous les jours pendant 5 jours et on obtient les résultats donnés dans le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1

t (jour)	0	1	2	3	4	5
$y(t)$ (UFC/L)	100	160	270	440	730	1200

On modélise l'évolution de $y(t)$ par l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = ky(t) \quad \text{Équation différentielle (1)}$$

où $k = 0,5 \text{ jour}^{-1}$ et $y(0) = 100 \text{ UFC/L}$.

Question n°4 Une autre expérimentation a consisté à étudier la population de ces bactéries au cours du temps mais en ayant ajouté dans le milieu de culture un bactéricide. Celui-ci ralentit la croissance de la population mais son action diminue avec le temps. Le nombre de ces bactéries (exprime en UFC/L) en fonction du temps est alors noté $z(t)$. On établit un nouveau modèle de l'évolution de l'effectif $z(t)$ pour $t \in [0; 5]$ jours selon l'équation différentielle (2) :

$$z'(t) = kz(t) - m + nt \quad \text{Équation différentielle (2)}$$

où $k = 0,5 \text{ jour}^{-1}$; $m = 50 \text{ jour}^{-1}$; $n = 10 \text{ jour}^{-2}$ et $z(0) = 100 \text{ UFC/L}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Une solution particulière de l'équation différentielle (2) est de la forme: $Z(t) = A + Bte^{t/2}$ où A et B sont des constantes
- B. L'équation différentielle (2) est une équation d'ordre 1 avec second membre
- C. L'équation différentielle (2) est une équation non-linéaire
- D. La solution de l'équation différentielle (2) est: $z(t) = (-20t + 40e^{t/2} + 60) \text{ UFC/L}$
- E. $\forall t \in [0; 5]$ jours et $\forall s \in [0; 5]$ jours, si $t \geq s$ alors $z(t) \geq z(s)$

Question n°5 Pour étudier l'efficacité du bactéricide, on s'intéresse à l'aire sous la courbe (notée AUC_2) et à la moyenne (notée moy) du nombre $z(t)$ qui est la solution de l'équation différentielle (2) entre les temps $t = 0$ jour et $t = 5$ jours.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. $\text{moy} = \frac{1}{5} \int_0^5 z(t) dt$
- B. $AUC_2 = \frac{1}{5} \int_0^5 z(t) dt$
- C. $AUC_2 = [-10t^2 + 80e^{t/2} + 60t]_0^5 \text{ jour.UFC/L}$
- D. $\text{moy} = (-6 + 16e^{5/2}) \text{ UFC/L}$
- E. $AUC_1 > AUC_2$ où AUC_1 est l'aire sous la courbe de $y(t)$ solution de l'équation différentielle (1) entre les temps $t = 0$ jour et $t = 5$ jours

Exercice 1

Des valeurs faibles de la concentration corpusculaire moyenne en hémoglobine (CCMH, mesurée en g/dL) peuvent permettre de détecter une anémie avec carence en fer. Le traitement classique est une supplémentation S en fer. Le temps $t = 0$ correspond au début de ce traitement S et on note $y(t)$ la différence de CCMH entre celle mesurée au temps t et celle mesurée en $t = 0$. Le temps t (en jour) est positif ou nul et $y(0) = 0$. $y(t)$ évolue selon l'équation différentielle (1) :

$$y'(t) = k \left(a - \frac{y(t)}{2} \right) \quad \text{Equation différentielle (1)}$$

où k et a sont des constantes réelles strictement positives, l'unité de la constante a est g/dL.

Question n°3 On s'intéresse à $y(t)$ solution de l'équation différentielle (1) avec la condition initiale en $y(0)$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. $y(t) = 2a - 2ae^{-\frac{kt}{2}}$
- B. La fonction $y(t)$ est décroissante
- C. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on trouve que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2a$
- D. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on peut approximer $e^{-\frac{kt}{2}}$ par $1 + \frac{kt}{2}$
- E. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 2, on peut approximer $e^{-\frac{kt}{2}}$ par $1 - \frac{kt}{2} + \frac{k^2 t^2}{8}$

Exercice 1

On étudie l'évolution au cours du temps, d'une population de parasites qui infestent le tube digestif de certains mammifères. Cette population est structurée en deux classes d'âge : les larves L et les adultes A . Le nombre de larves au temps t est décrit par la fonction $L(t)$, le nombre d'adultes au temps t est décrit par la fonction $A(t)$ et le temps t (en jours) est positif ou nul.

L'infestation se produit lors de l'ingestion des aliments contenant uniquement des larves. La quantité de larves ingérées par unité de temps est noté m . Les larves ne meurent pas et ne se multiplient pas, elles se transforment en adultes avec un taux b ; les formes adultes ne se multiplient pas, elles ne peuvent que mourir avec un taux k . On suppose qu'au temps $t = 0$ l'individu ne porte aucun parasite ni larve, ni adulte. Les paramètres m , b et k prennent des valeurs différentes de zéro et $b \neq k$.

On propose le modèle suivant qui décrit l'évolution de la population des larves et des adultes :

$$L'(t) = m - bL(t) \quad \text{équation (1)}$$

$$A'(t) = bL(t) - kA(t) \quad \text{équation (2)}$$

Question n°1 On étudie les deux équations (1) et (2) proposées. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. Les 2 paramètres m et b sont du même signe
- B. Les 2 paramètres m et b sont négatifs
- C. Le paramètre k est négatif
- D. D'après ce modèle, l'évolution du nombre de larves au temps t ne dépend pas du nombre de parasites adultes au temps t
- E. D'après les conditions initiales, $L'(0) = m$

Question n°2 On étudie la fonction $L(t)$ à partir de l'équation (1). Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. La solution de l'équation (1) conduit à $L(t) = \frac{m}{b}(1 - e^{-bt})$
- B. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on trouve que $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = 0$
- C. La fonction $L(t)$ est décroissante
- D. La fonction $L(t)$ ne présente pas de point d'inflexion
- E. La fonction $L(t)$ est monotone

Question n°4 On remplace dans l'équation (2), $L(t)$ par son expression trouvée dans la question 2.

On montre que la résolution de l'équation (2) conduit à :

$$A(t) = \frac{m}{k} + \frac{m}{b-k} e^{-bt} - m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b-k} \right) e^{-kt}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. Après avoir remplacé $L(t)$ par sa forme explicite, l'équation (2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre
- B. Après avoir remplacé $L(t)$ par sa forme explicite, l'équation (2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants
- C. La solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée à l'équation (2) est proportionnelle à e^{-kt}
- D. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on trouve que la population des formes adultes atteint une valeur limite m/k
- E. La fonction $A(t)$ est strictement décroissante

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On considère un réacteur chimique dans lequel un réactif subit une transformation chimique. Un flux continu apporte une solution contenant ce réactif dans le réacteur et un autre flux continu évacue une solution contenant les produits de la réaction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'évolution de la concentration de ce réactif peut être décrite par l'équation différentielle

$$f'(t) = \frac{1}{\theta}(c_1 - f(t)) - kf(t) \quad \forall t > 0 \quad (1)$$

où $f(t)$ est la concentration de ce réactif dans le réacteur en fonction du temps t . c_1 est la concentration de ce réactif dans le flux d'entrée, θ et k sont des paramètres réels strictement positifs, caractéristiques du réacteur et de la réaction chimique. La concentration c_1 sera soit fixée à une valeur constante (questions 10 à 13), soit exprimée en fonction du temps t (question 14). Toutes les concentrations sont exprimées en mM.

➤ **Question 10**

On résout l'équation différentielle (1) avec $c_1 = 0$ mM.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution générale est $f(t) = Ae^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- B) La solution générale est $f(t) = Ae^{-10\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- C) La solution générale est $f(t) = A + e^{\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- D) La solution générale est $f(t) = A + e^{\left(\frac{\theta}{k\theta+1}\right)t}$ où A est une constante réelle.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 11

On résout l'équation différentielle (1) avec $c_1 = 20$ mM.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution générale est $f(t) = \frac{20A}{1+k\theta} + Ae^{(\frac{\theta}{k\theta+1})t}$ où A est une constante réelle.
- B) La solution générale est $f(t) = \frac{20}{1+k\theta} + Ae^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}$ où A est une constante réelle.
- C) La solution générale est $f(t) = \frac{20A}{1+k\theta} e^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}$ où A est une constante réelle.
- D) La solution générale est $f(t) = \frac{20t}{1+k\theta} + Ae^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}$ où A est une constante réelle.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 12

On applique à la solution de la question 11, la condition initiale

$$f(0) = 10 \text{ mM.}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $f(t) = \frac{20+10(k\theta-1)e^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}}{1+k\theta}$
- B) $f(t) = \frac{20+10(k\theta+1)e^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}}{1+k\theta}$
- C) $f(t) = \frac{20}{1+k\theta} + \frac{(-10+10k\theta)}{1+k\theta} e^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}$
- D) $f(t) = \frac{20t}{1+k\theta} + \frac{(-10+10k\theta)}{1+k\theta} e^{-(\frac{k\theta+1}{\theta})t}$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 13

On souhaite calculer l'aire sous la courbe représentative de f pour $t \in [0, T]$ soit

$$\int_0^T f(t) dt$$

où $f(t)$ est la solution de la question 12. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $\int_0^T f(t) dt = \frac{20 T}{1+k\theta} + \frac{(-10+10k\theta)\theta}{(1+k\theta)^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)T} \right]$
- B) $\int_0^T f(t) dt = \frac{20}{1+k\theta} + \frac{(-10+10k\theta)\theta}{1+k\theta} \left[1 - e^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)T} \right]$
- C) $\int_0^T f(t) dt = \frac{20 T^2}{2(1+k\theta)} + \frac{(-10+10k\theta)\theta}{(1+k\theta)^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)T} \right]$
- D) $\int_0^T f(t) dt = \frac{20 \theta}{(1+k\theta)^2} - e^{-\left(\frac{k\theta+1}{\theta}\right)T}$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 14

On considère maintenant que c_1 dépend du temps t . La condition initiale reste $f(0) = 10$ mM.

La résolution de l'équation différentielle (1) avec $c_1(t) = 5 \sin(2t)$ passe par l'obtention d'une solution particulière. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution particulière est de la forme $A \sin(2t)$
où A est une constante réelle non nulle.
- B) La solution particulière est de la forme $5 \sin(At)$
où A est une constante réelle non nulle.
- C) La solution particulière est de la forme $A \sin(2t) + B \cos(2t)$
où A et B sont des constantes réelles non nulles.
- D) La solution particulière est de la forme $5 \sin(At) + 5 \cos(Bt)$
où A et B sont des constantes réelles non nulles.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Dans cet exercice, on étudie deux modèles de dissolution de comprimés : les questions 10 à 12 concernent le modèle de Weibull et les questions 13 à 15 celui de Korsmeyer-Peppas.

Dans les deux cas, on s'intéresse à la fraction de comprimé dissoute en un temps donné. La fonction qui décrit cette fraction dissoute sera notée f pour le premier modèle (questions 10 à 12) et g pour le deuxième modèle (questions 13 à 15).

Dans les deux cas, on considère uniquement des temps positifs. La mesure de la dissolution du comprimé commence en $t = 0$ quand celui-ci est introduit avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. De plus, les fonctions f et g sont continues à droite en $t = 0$.

➤ **Question 10**

Selon le modèle de Weibull, la fonction f satisfait l'équation différentielle :

$$f'(t) = abt^{b-1}(1 - f(t)) \quad \forall t > 0$$

où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

Le temps est exprimé en minutes (min), la constante b est sans unité, la constante a est exprimée en min^{-b} .

On résout cette équation par la méthode de séparation de variables, en appliquant la condition initiale $f(0) = 0$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $f(t) = at^b \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- B) $f(t) = -1 + e^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- C) $f(t) = 1 - e^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- D) $f(t) = a - ae^{-at^b} \quad \forall t \geq 0, \forall a > 0, \forall b > 0$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 11**

Afin de calculer l'efficacité de la dissolution, on a besoin de calculer l'aire sous la courbe de f (solution de la question 10) entre le temps $t = 0$ et un temps t_0 strictement positif.

Calculez cette aire (notée A) lorsque $b = 1$, $a > 0$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) $A = \int_0^{t_0} f(t)dt = t_0 - \frac{1}{a}e^{-at_0} \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- B) $A = \int_0^{t_0} f(t)dt = t_0 - \frac{1}{a}(1 - e^{-at_0}) \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- C) $A = \int_0^{t_0} f(t)dt = \frac{1}{2}at_0^2 \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- D) $A = \int_0^{t_0} f(t)dt = at_0 - 1 + e^{-at_0} \quad \forall t_0 > 0, \forall a > 0$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On souhaite élaborer un modèle simplifié de l'équilibre entre les formes dimérique et monomérique d'une protéase de rétrovirus.

Dans un premier temps, on étudie la dissociation du dimère D vers deux monomères M, selon la réaction : $D \rightarrow 2M$

On note $y(t)$ la concentration en fonction du temps t du monomère M.

Pour les deux questions suivantes (questions 14 et 15), nous considérons l'équilibre entre forme monomérique et dimérique de la protéase : $D \rightleftharpoons 2M$

Dans cette situation, l'équation différentielle 3 qui régit le système est :

Équation différentielle 3 $y'(t) = [y(t) - 2][y(t) + 3]$

➤ **Question 14**

Afin de résoudre l'équation différentielle 3, on souhaite tout d'abord faire une décomposition en éléments simples du rapport $\frac{1}{[y(t)-2][y(t)+3]}$ quand il est défini. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

A) $\frac{1}{[y(t)-2][y(t)+3]} = \frac{3}{5[y(t)-2]} - \frac{2}{5[y(t)+3]}$

B) $\frac{1}{[y(t)-2][y(t)+3]} = \frac{1}{5[y(t)-2]} - \frac{1}{5[y(t)+3]}$

C) $\frac{1}{[y(t)-2][y(t)+3]} = \frac{1}{6[y(t)-2]} - \frac{1}{6[y(t)+3]}$

D) $\frac{1}{[y(t)-2][y(t)+3]} = \frac{1}{5[y(t)-2]} + \frac{1}{5[y(t)+3]}$

E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ Question 15

On s'intéresse à la solution de l'équation différentielle 3. Pour cela, on intègre par rapport au temps t chaque terme (quand il est défini) de l'égalité suivante :

$$\frac{y'(t)}{[y(t) - 2][y(t) + 3]} = 1$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) La solution de l'équation différentielle 3 satisfait la relation :
 $-\frac{1}{5}\ln|y(t) - 2| + \frac{1}{5}\ln|y(t) + 3| = t + C$ où C est une constante réelle.
- B) La solution de l'équation différentielle 3 satisfait la relation :
 $\frac{1}{6}\ln|y(t) - 2| - \frac{1}{6}\ln|y(t) + 3| = Ct$ où C est une constante réelle.
- C) La solution de l'équation différentielle 3 satisfait la relation :
 $\frac{1}{5}\ln|y(t) - 2| - \frac{1}{5}\ln|y(t) + 3| = t + C$ où C est une constante réelle.
- D) La solution de l'équation différentielle 3 satisfait la relation :
 $-\frac{3}{5}\ln|y(t) - 2| + \frac{2}{5}\ln|y(t) + 3| = t + C$ où C est une constante réelle.
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

Dans cet exercice on étudie l'évolution en fonction du temps de l'effectif de la population d'abord d'une espèce isolée (question 10 et 11), puis des effectifs de deux espèces en symbiose (questions 12 à 15).

Les questions 12 à 15 concernent l'étude de l'évolution des populations de deux espèces en symbiose. Les effectifs des deux espèces en fonction du temps sont notés $z(t)$ et $y(t)$. Ces effectifs sont modélisés par le système d'équations suivant :

$$\text{système n° 1} \quad \begin{cases} z'(t) = -2z(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2z(t) + y(t) \end{cases}$$

Au cours de la résolution de ce système on obtient l'équation suivante :

$$\text{équation n°1} \quad z''(t) + z'(t) - 6z(t) = 0$$

➤ **Question 12**

On s'intéresse à $z(t)$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) L'expression $z(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$ (avec A et B constantes réelles) est solution de l'équation n° 1
- B) Une équation caractéristique de l'équation n° 1 est $r^2 + r - 6t = 0$, où r est un nombre complexe
- C) L'expression $z(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ (avec A et B constantes réelles) est solution de l'équation n° 1
- D) Une équation caractéristique de l'équation n° 1 est $r^2 + r - 6t = 0$, où r est un nombre complexe
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

Exercice 2 (Questions 10 à 15)

On peut, dans certaines situations, modéliser, dans un milieu biologique, l'évolution (notée y) de la concentration des levures, en fonction de la concentration (notée x) en fructose, selon l'équation d'Andrews :

$$y = f(x) = \frac{Ax}{K+Bx+x^2} \quad \text{où } A, B \text{ et } K \text{ sont des constantes réelles strictement positives}$$

Pour toutes les questions on se limitera au domaine $x \in \mathbb{R}^{+*}$

➤ **Question 13**

On pose $A=9$, $B=9$ et $K=18$ (en unités arbitraires) et on étudie l'intégrale de $f(x)$, toujours dans le même domaine de définition $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) On peut réécrire la fonction $f(x)$ sous la forme $f(x) = -\frac{18}{x-6} + \frac{9}{x-3}$
- B) On peut réécrire la fonction $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{18}{x+6} - \frac{9}{x+3}$
- C) L'intégrale $\int f(x)dx$ est égale à $18 \ln(x+6) - 9 \ln(x+3) + Cte$
où Cte est une constante réelle
- D) L'intégrale $\int f(x)dx$ est égale à $-18 \ln(x-6) + 9 \ln(x-3) + Cte$
où Cte est une constante réelle
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

➤ **Question 14**

La concentration x varie entre deux valeurs $x_1=2$ et $x_2=6$ (en unités arbitraires). On souhaite calculer la valeur moyenne de y entre ces deux valeurs de x . On note cette valeur moyenne y_{moy} . On pose à nouveau $A=9$, $B=9$ et $K=18$ (en unités arbitraires).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A) Cette valeur moyenne est calculée par la formule $y_{moy} = \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$
- B) Cette valeur moyenne est calculée par la formule $y_{moy} = \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx$
- C) Cette valeur moyenne vaut $y_{moy} = \frac{9}{4} \ln \frac{5}{4}$
- D) Cette valeur moyenne vaut $y_{moy} = \frac{9}{4} \ln \frac{4}{5}$
- E) Aucune des quatre propositions précédentes n'est exacte.

2023 Session 2

Exercice 1

Un médicament est ingéré par voie orale. On note $y(t)$ la concentration en mg/L de ce médicament dans le sang en fonction du temps t . Le temps t en heure est positif ou nul.

Pour décrire l'évolution de la concentration, on propose le modèle suivant :

$$y'(t) = -sy(t) + sAe^{-2st} \quad \forall t > 0 \quad \text{Équation différentielle (1)}$$

avec $A > 0$ et $s > 0$. La constante s s'exprime en h^{-1} et la constante A en mg/L. Les valeurs des constantes sont choisies de sorte que la concentration $y(t)$ soit toujours positive ou nulle.

Question n°2 On s'intéresse à une solution particulière $Y(t)$ de l'équation différentielle (1).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une solution particulière de l'équation différentielle (1) ?

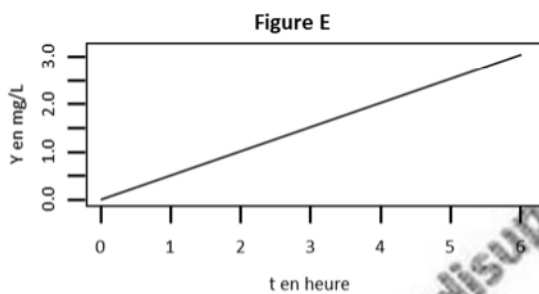
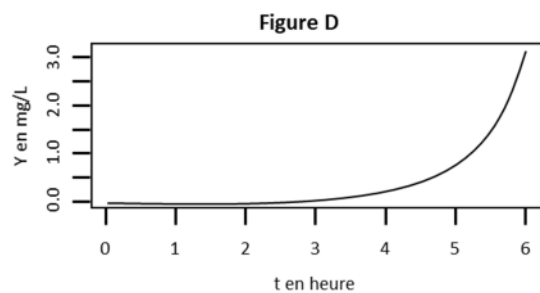
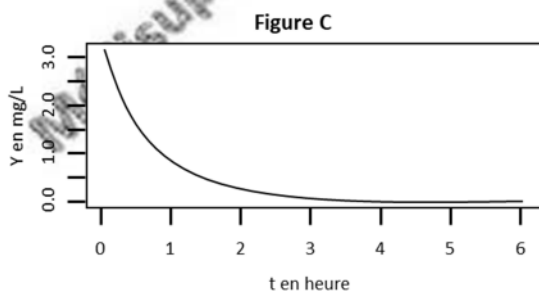
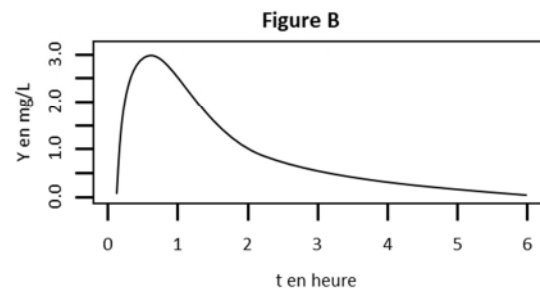
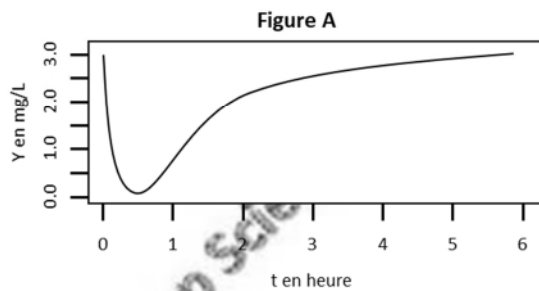
- A. $Y(t) = -At$
- B. $Y(t) = -Ae^{-2st}$
- C. $Y(t) = -Ae^{2st}$
- D. $Y(t) = e^{-2st}$
- E. $Y(t) = Ae^{2st}$

Question n°3 On étudie la fonction $y(t)$ à partir de l'équation différentielle (1).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s) ?

- A. La solution générale de l'équation différentielle (1) est $y(t) = (Be^{-st} - Ae^{-2st})$ où B est une constante
- B. Si $y(0) = 0$ mg/L alors $y'(t) = sA^{-2st}(2e^{-st} - 1)$
- C. Si $y(0) = 0$ mg/L alors $y'(t)$ s'annule en $t_m = (\ln(2)/s)$ h
- D. Si $y(0) = 0$ mg/L alors $y(t)$ est une fonction croissante
- E. Si $y(0) = 0$ mg/L alors $y(t)$ est une fonction monotone

Question n°4 On pose $s = 1,4 \text{ h}^{-1}$, $y(0) = 0 \text{ mg/L}$ et $A = 12 \text{ mg/L}$. On s'intéresse à la représentation graphique de $y(t)$, solution de l'équation différentielle (1). Une des cinq figures suivantes représente la fonction $y(t)$, laquelle ?



- A. La figure A
- B. La figure B
- C. La figure C
- D. La figure D
- E. La figure E

Exercice 1

On s'intéresse au nombre de bactéries en fonction du temps, $N(t)$, pour une population comportant N_0 bactéries à $t = 0$ ($N_0 > 0$). Le taux de croissance bactérienne, noté α_0 , est constant au cours du temps car la division des bactéries est supposée instantanée. En réponse à l'infection, les bactéries sont combattues par des macrophages. Pour décrire l'évolution de la population bactérienne, on considère que le nombre des macrophages, noté M_0 , est constant au cours du temps et qu'un macrophage est capable de tuer n bactéries par unité de temps. La vitesse de disparition des bactéries du fait des macrophages est égale à nM_0 .

Pour décrire l'évolution de la population bactérienne, on propose le modèle suivant :

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 \quad \forall t > 0 \text{ équation (1)}$$

avec $\alpha_0 > 0$, $n > 0$ et $M_0 > 0$.

Question n°2 On étudie la fonction $N(t)$ à partir de l'équation (1). On définit la constante N_1 égale à $\frac{nM_0}{\alpha_0}$.

Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte?

La solution de l'équation (1) est :

- A. $N(t) = (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t}$
- B. $N(t) = (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} - N_0$
- C. $N(t) = (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} + N_0$
- D. $N(t) = (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} + N_1$
- E. $N(t) = (N_0 - N_1)e^{\alpha_0 t} - N_1$

Question n°3 On s'intéresse au comportement de l'évolution du nombre de bactéries en fonction de N_0 et N_1 avec $N_1 = \frac{nM_0}{\alpha_0}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Si $N_0 < N_1$, à chaque instant t , les macrophages détruisent les bactéries plus vite qu'elles ne se reproduisent
- B. Si $N_0 < N_1$, $N(t)$ est une fonction croissante et monotone.
- C. Si $N_0 > N_1$, $N(t)$ est une fonction croissante et monotone
- D. Si $N_0 = N_1$, $N(t) = -N_1 \quad \forall t > 0$
- E. Si $N_0 = N_1$, à chaque instant t , le nombre de bactéries détruites par les macrophages est identique au nombre de nouvelles bactéries formées

Pour les questions 4 et 5, on considère maintenant qu'en réponse à l'infection, le nombre de macrophages augmente exponentiellement. Le nombre de macrophages en fonction du temps est notée $M(t) = M_0 e^{\alpha_m t}$ où α_m est une constante réelle strictement positive différente de α_0 . La condition initiale et la constante N_I sont identiques à savoir $N(0) = N_0 > 0$ et $N_I = \frac{nM_0}{\alpha_0}$.

L'équation (1) devient dans ce cas :

$$N'(t) = \alpha_0 N(t) - nM_0 e^{\alpha_m t} \quad \forall t > 0 \quad \text{équation (2)}$$

avec $\alpha_0 > 0, \alpha_m > 0, \alpha_0 \neq \alpha_m, n > 0$ et $M_0 > 0$.

Question n°5 On s'intéresse à la solution de l'équation (2).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Une solution particulière de l'équation (2) est de la forme $Be^{\alpha_m t}$ où B est une constante
- B. La solution générale de l'équation (2) est $N(t) = Ce^{\alpha_0 t} - \frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_m t}$ où C est une constante
- C. La solution de l'équation (2) est $N(t) = \frac{(\alpha_m - \alpha_0)N_0 + nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_0 t} - \frac{nM_0}{\alpha_m - \alpha_0} e^{\alpha_m t}$ avec la condition initiale $N(0) = N_0$
- D. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 1, on peut approximer $e^{\alpha_m t}$ par $1 + \alpha_m t$
- E. Au voisinage de l'origine, à l'ordre 2, on peut approximer $e^{\alpha_m t}$ par $1 + \alpha_m t + \frac{\alpha_m^2 t^2}{2}$