

UE9 – Mathématiques - Biostatistiques

Annales classées corrigées

Échantillonnage, Intervalle de Pari (IP)

SUJET

2023

Le nombre d'APP par semaine dans un autre hôpital francilien peut se modéliser par une loi de Poisson de moyenne 5

Question n°9 On s'intéresse à la moyenne hebdomadaire du nombre d'APP prises en charge dans l'hôpital francilien sur une année (52 semaines) et sur deux années. On note M52 cette moyenne observée sur une année et M104 celle observée sur deux années. En supposant les semaines indépendantes les unes des autres, parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. L'intervalle de pari à 95 % de M104 est $[4,0 ; 6,0]$ (à 0,1 près)
- B. L'intervalle de pari à 99 % de M104 est plus large que l'intervalle de pari à 95 % de M104
- C. L'intervalle de pari à 95 % de M104 est plus large que l'intervalle de pari à 95 % de M52
- D. L'intervalle de pari à 95 % de M52 est $[4,4 ; 5,6]$ (à 0,1 près)
- E. L'intervalle de pari à 99 % de M104 est plus large que l'intervalle de pari à 95 % de M52

2022**Exercice 2**

Au Canada, une procédure de test aléatoire est réalisée en plus de l'obligation de fournir un certificat de vaccination pour les voyageurs internationaux. La probabilité d'être testé dépend uniquement du pays de provenance selon une classification en 3 catégories liées à l'état de l'épidémie : 0,8 pour un pays classé rouge, 0,5 pour un pays classé orange et 0,2 pour un pays classé vert. Les tirages au sort des patients testés sont indépendants.

Question n°8 Vous souhaitez pouvoir organiser le débarquement et l'orientation des 300 passagers d'un avion provenant de Canberra (pays vert) où la probabilité théorique qu'un passager soit mis en quarantaine est 0,02. On supposera que le fait d'être mis en quarantaine ou non est indépendant d'un passager à l'autre. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Vous devez vous attendre à tester 60 passagers (en moyenne)
- B. L'intervalle de pari à 95% du nombre de passagers mis en quarantaine est $[1 ; 11]$ (à 1 passager près)
- C. Les conditions de validité du calcul de l'intervalle de pari à 95% de la proportion de passagers mis en quarantaine doivent être vérifiées aux bornes de cet intervalle
- D. On ne peut pas calculer l'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de passagers qui seront testés
- E. Si l'avion comptait plus de passagers, l'intervalle de pari à 95% du nombre de passagers mis en quarantaine serait moins large

Exercice 3

On s'intéresse aux effets secondaires du vaccin contre la Covid-19 avec ou sans ARN messenger. On considère la variable Y à quatre modalités : "Rougeur locale", "Douleur au point d'injection", "Réaction allergique" et "Pas d'effet secondaire". Les résultats portant sur 200 patients où chaque patient ne présente qu'une seule modalité de Y sont les suivants :

	Rougeur locale	Douleur au point d'injection	Réaction allergique	Pas d'effet secondaire	Total
Vaccin avec ARN messenger -	8	8	4	80	100
Vaccin sans ARN messenger	6	4	2	88	100
Total	14	12	6	168	200

Question n°14 On veut comparer la proportion d'effets secondaires suite au vaccin avec ARN messenger à la proportion théorique π d'effets secondaires avec le vaccin de la grippe saisonnière où $\pi = 10\%$. Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à l'intervalle de pari à 95% de la proportion observée d'effets secondaires obtenu sous H_0 (à 0,01 près)?

- A. [0,04 ; 0,16]
- B. [0,09 ; 0,12]
- C. [0,12 ; 0,28]
- D. [0,19 ; 0,22]
- E. [0,22 ; 0,39]

Le responsable de l'hôpital de Dache décide de mettre en place un système d'évaluation de la satisfaction des patients hospitalisés. Cet hôpital ne comprend que 2 services (Service A et Service B). A la sortie de l'hôpital, on demande à chaque patient de donner une note de satisfaction à propos de leur hospitalisation. Cette note est mesurée sur l'échelle des entiers compris entre 0 et 10 (0 correspondant à une absence totale de satisfaction et 10 à une satisfaction maximale).

Soit X_A , la variable aléatoire correspondant à la note donnée par un patient à sa sortie du service A. La distribution de X_A est symétrique et vérifie $P(X_A = 0) = 0,05$, $P(X_A = 1) = 0,05$, $P(X_A = 2) = 0,05$, $P(X_A = 3) = 0,1$, $P(X_A = 4) = 0,1$, $P(X_A = 5) = 0,3$. La variance de X_A vaut 6.

Pour améliorer les notations dans le service B, la personne en charge de recueillir les évaluations coche, sans demander leur avis aux patients et de manière équiprobable, 9 ou 10.

Question n°4 On considère maintenant la note moyenne M_A du service A et la note moyenne M_B du service B obtenues sur les G premiers mois de l'année qui a vu 600 patients sortir de chacun des services.

Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A. La loi suivie par M_A peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 600$
- B. La loi suivie par M_A peut être approximée par une loi normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma^2 = 0,01$
- C. La loi suivie par M_B est une loi binomiale de paramètre $n = 600$ et $p = 0,5$
- D. La loi suivie par M_B est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 9,5$
- E. La loi suivie par M_B peut être approximée par une loi normale de paramètres $\mu = 9,5$ et $\sigma^2 = 1/2400$

Question n°6 Une note inférieure ou égale à 1 indique qu'un patient est très mécontent et qu'il va demander un recours au médiateur de l'hôpital. En considérant que 100 patients sortent chaque mois du service A, on s'intéresse au nombre de recours au médiateur pendant un mois donné.

Cochez LA réponse exacte.

- A. Il y a 5% de risque que le nombre de recours au médiateur soit compris entre 4 et 16, à 1% près
- B. Il y a 95% de risque que le nombre de recours au médiateur soit compris entre 4 et 16, à 1% près
- C. Il y a 90% de risque que le nombre de recours au médiateur soit compris entre 4 et 16, à 1% près
- D. Il y a 5% de risque que le nombre de recours au médiateur soit supérieur à 16, à 1% près
- E. Il y a 10% de risque que le nombre de recours au médiateur soit supérieur à 16, à 1% près

2019

La procédure suivante est mise en place aux urgences. Si le logiciel classe la radio A, le patient n'est pas traité pour pneumopathie; si le logiciel classe la radio C, le patient est traité par antibiotiques pour sa pneumopathie et si le patient est classé D, la radio est relue par un radiologue et le dosage d'un biomarqueur sanguin BIOM, permettant d'aider au diagnostic, est réalisé. On sait que $P(D) = 0,40$ et que 20% des patients classés D aux urgences de Champignac ont une pneumopathie.

Question n°4 Avant la mise en place de la procédure, toutes les radios étaient relues par le radiologue. Si 100 patients se présentent aux urgences, donner l'intervalle de pari à 95% du nombre de lectures de radio évitées à 2 lectures près. Cochez LA réponse exacte.

- A. [55 ; 65]
- B. [35 ; 45]
- C. [50 ; 70]
- D. [30 ; 40]
- E. [40 ; 60]

2017

Le fabriquant des vaccins indique que le délai T (en semaines) d'obtention d'une immunité suffisante pour protéger de la grippe après vaccination suit une loi exponentielle d'espérance 1.

Question n°14 Au total, 100 personnes ont été vaccinées, le même jour, dans l'hôpital. On s'intéresse au délai moyen (en semaines) d'obtention d'une immunité suffisante après vaccination de ces 100 personnes. Cochez la(les) proposition(s) exacte(s).

- A. La loi suivie par le délai moyen d'obtention d'une immunité suffisante est une loi exponentielle
- B. On peut approximer la loi suivie par le délai moyen d'obtention d'une immunité suffisante par une loi normale de moyenne 1 et de variance 100.
- C. L'intervalle de pari à 95% du délai moyen d'obtention d'une immunité suffisante comprend 1,5.
- D. La probabilité que le délai moyen d'obtention d'une immunité suffisante soit supérieure à 1,2 est 2,5% (à 1% près).
- E. On peut approximer la médiane de ce délai moyen à 1.

2015

Sur l'une de leurs pancartes, les manifestants ont rapporté l'information suivante *Le citoyen doit attendre aujourd'hui en moyenne 30 jours avant de pouvoir décrocher un rendez-vous chez un médecin spécialiste*. On suppose que le délai de rendez-vous suit une loi exponentielle.

QCM 4 – Si l'ensemble des 45 enfants d'une classe demandent chacun de façon indépendante un rendez-vous chez un pédiatre, et en supposant la pancarte précédente exacte, que peut-on dire sur la durée moyenne d'obtention des rendez-vous de ces enfants ? Cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

- A - On peut considérer qu'elle suit une loi exponentielle notamment car les demandes sont indépendantes
- B - On peut considérer qu'elle suit une loi normale notamment car la classe compte 45 enfants
- C - On ne peut pas connaître la forme de sa loi
- D - La durée moyenne a pour espérance 30 jours et variance 30 jours²
- E - La durée moyenne a pour espérance 30 jours et variance 20 jours²

QCM 5 – Quelle est la probabilité que la durée moyenne d'obtention des rendez-vous de ces enfants soit supérieure à 30 jours ? Cochez **LA** réponse exacte.

- A - Inférieure à 0,40
- B - Entre 0,45 et 0,55
- C - Supérieure à 0,60
- D - On ne peut effectuer ce calcul car cette durée n'est pas aléatoire
- E - On ne peut effectuer ce calcul car le théorème limite central ne s'applique pas

QCM 6 – Un Wallon interrogé rapporte que la moitié des communes belges manque de médecin. Un élu décide de constituer par tirage au sort un échantillon de communes et de compter celles sans médecin. Combien doit-il ainsi sélectionner de communes au minimum pour que sous cette hypothèse il puisse parier à 95% que cet effectif sera dans un intervalle de largeur 20 ? Cochez **LA** réponse exacte.

- A - 1
- B - 10
- C - 20
- D - 50
- E - 100

2013

QCM3- Pour éviter les problèmes liés aux naissances par le siège, il décide de proposer un traitement aux femmes enceintes dont le fœtus est en siège à la 33^{ème} semaine de gestation, afin qu'il se retourne avant l'accouchement. Il apprend que les médecins chinois chauffent une herbe à proximité de la peau du point d'acupuncture BL67 (« Zhiyin ») près du 5^{ème} orteil, ce qui conduit au retournement spontané du fœtus en moins de deux semaines dans 75% des cas. Il décide d'évaluer ce traitement sur un échantillon de $n = 27$ femmes. En supposant que ces données sont valides, cochez la ou les propositions exactes.

- A. Il peut parier à 95% que le nombre de fœtus qui vont se retourner sera compris entre 7 et 11 (à 1 près)
- B. Il peut parier à 95% que le nombre de fœtus qui vont se retourner sera compris entre 16 et 25 (à 1 près)
- C. Il s'agit d'un intervalle de pari
- D. Il s'agit d'un intervalle de confiance
- E. Le théorème de la limite centrale ne peut s'appliquer car $n = 27$

2012

QCM 6 - En fait, il pense que l'ancien test sur les urines a sous-estimé la proportion réelle de dopés du tour et que celle-ci est en réalité de l'ordre de 20%. Sous cette hypothèse, combien doit-il sélectionner au minimum de coureurs pour estimer cette proportion avec un intervalle de largeur 10% ? Cochez LA proposition exacte.

- A. 8 coureurs
- B. 16 coureurs
- C. 32 coureurs
- D. 64 coureurs
- E. Le tour n'ayant que 200 coureurs, il ne pourra parvenir à cet objectif

2011

Un médecin décide de réaliser l'expérience suivante dans son laboratoire. Il dispose d'une boîte en forme d'étoile à cinq branches au bout desquelles sont situées des niches numérotées de 1 à 5, dont seule l'une d'entre elles contient du fromage. Il place une souris au centre de cette boîte et note la niche où se réfugie la souris. Il décide maintenant d'enregistrer le temps Y en secondes que mettent les souris à trouver le fromage.

QCM 6 En supposant que Y suit une loi exponentielle de moyenne 5, que peut-il dire de la moyenne observée du temps à trouver le fromage chez les 100 souris? Parmi les réponses suivantes, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - Le temps moyen est égal à 5 secondes
- b - Le temps moyen a 95 chances sur 100 d'être compris entre 4 et 6
- c - Le temps moyen a 95 chances sur 100 d'être compris entre 4,55 et 5,45
- d - Il a pu supposer que le temps moyen était gaussien
- e - Il a fait l'hypothèse que le temps à trouver le fromage était gaussien

2009

La résistance aux traitements du paludisme est un problème grave en Afrique. Une large étude faite en 2007 chez des patients infectés par le paludisme rapporte que 50% des patients étaient résistants à la chloroquine et 10% étaient multi-résistants (c'est à dire résistants à au moins 3 molécules). On effectue à nouveau une étude en 2008 sur un échantillon de n patients atteints de paludisme. Pour chaque patient, on mesure sur un prélèvement parasitaire la résistance à la chloroquine (oui/non), ainsi que la multi-résistance (oui/non). On arrondira les pourcentages à 1% près.

QCM 7 En supposant que les probabilités de résistance et de multi-résistance aux traitements du paludisme en 2008 sont les mêmes qu'en 2007, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - L'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de patients résistants à la chloroquine sur un échantillon de $n = 49$ patients vaut [36%; 64%]
- b - Pour que la largeur de l'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de patients résistants à la chloroquine soit 3 fois plus faible, il faut étudier 3 fois plus de patients
- c - Si on veut que la largeur de l'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de patients résistants à la chloroquine soit inférieure ou égale à 10%, il faut étudier au moins 400 patients
- d - L'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de patients multirésistants sur un échantillon de $n = 49$ patients vaut [2%; 18%]
- e - L'intervalle de pari à 95% de la proportion observée de patients multirésistants sur un échantillon de $n = 49$ patients vaut [4%; 16%]

2008

Huit étudiants souhaitent organiser une fête de fin d'année. Ils décident d'envoyer des invitations, tout en réalisant l'organisation de cette fête en parallèle.

QCM 3 Le samedi 29 mars est finalement retenu. Les étudiants décident maintenant d'établir le nombre d'invitations à envoyer. En supposant que le nombre d'invitations d'un étudiant est une variable gaussienne de moyenne 200 et d'écart-type 50, dire la(les) proposition(s) vraie(s).

- a - La probabilité pour qu'un étudiant invite moins de 150 étudiants est de 0,32 (à 0,01 près)
- b - La probabilité pour qu'un étudiant invite moins de 150 étudiants est de 0,16 (à 0,01 près)
- c - On peut parier à 95% que le nombre d'invités d'un étudiant sera compris entre 170 et 230
- d - On peut parier à 95% que le nombre d'invités d'un étudiant sera compris entre 100 et 300
- e - On peut parier à 95% que le nombre d'invités d'un étudiant sera supérieur à 120 (à 5 près)

2007

QCM 7 On retient que le nombre d'appels par jour suit une loi Normale $N(\mu = 2000, \sigma = 40)$. On peut en déduire que 95% des jours de semaine recevront, Dire **la proposition vraie**.

- a - entre 1960 et 2040 appels
- b - entre 1960 et 2080 appels
- c - entre 1920 et 2040 appels
- d - entre 1920 et 2080 appels
- e - les conditions de validité ne sont pas respectées

Vous décidez d'utiliser la température corporelle, mesurée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$), des patients atteints de grippe sévère, 3 jours après le début de leur maladie, pour détecter les malades qui s'aggravent. **On supposera par la suite que cette mesure de la température est une variable Gaussienne.**

On sait que, chez les malades qui ne s'aggravent pas (neuf sur 10), la température fluctue autour de sa moyenne μ_1 dans 95% des cas entre 35,5 et 37,5 et que chez les malades aggravés, la température fluctue autour de sa moyenne $\mu_2=39$ avec un écart-type $\sigma_2=1$.

L'Oseltamivir, un antiviral efficace contre les virus de la grippe, est commercialisé sous le nom de Tamiflu. **On considère que, sous Tamiflu, la température des malades atteints de grippe sévère qui s'aggravent suit toujours une loi Normale, d'écart-type 1°C .** On voudrait tester l'hypothèse nulle H_0 que le Tamiflu ne modifie pas la température moyenne contre l'hypothèse alternative H_1 qu'elle est diminuée en moyenne de 1°C .

QCM 6 On constitue un échantillon de n malades grippés qui s'aggravent. On suppose que l'hypothèse nulle est vraie. Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est vraie ?

- a - L'intervalle de pari à 95% de la température moyenne des n sujets est de $39 \pm 2/\sqrt{n}$,
- b - L'intervalle de pari à 95% de la température moyenne des n sujets est de $38 \pm 2/\sqrt{n}$
- c - L'intervalle de confiance à 95% de la température moyenne des n sujets est de $38 \pm 2/\sqrt{n}$
- d - L'intervalle de confiance à 95% de la température moyenne des n sujets est de $39 \pm 2/\sqrt{n}$
- e - Il faut préciser une condition sur n pour répondre

2023 Session 2

Question n°8 Lorsqu'une benne a terminé sa tournée de ramassage et part à la décharge, on peut considérer que le poids des déchets chargés suit une loi normale de moyenne 4,5 tonnes et d'écart-type 0,39 tonne. Une benne qui emporte plus de 5 tonnes de déchets est en surcharge. Parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. La probabilité que la charge d'une benne à la fin de sa tournée soit égale à 4,5 tonnes est de 0,5 (à 0,01 près)
- B. La probabilité qu'une benne soit en surcharge à la fin de sa tournée est de 0,1 (à 0,01 près)
- C. Il est possible de calculer l'intervalle de pari à 95 % de la proportion de bennes en surcharge à la fin de leur tournée dans un échantillon de $n = 32$ bennes (en considérant les bennes indépendantes)
- D. L'intervalle de pari à 95 % de la proportion de bennes en surcharge à la fin de leur tournée dans un échantillon de $n = 100$ bennes (en considérant les bennes indépendantes) vaut $[0,04; 0,16]$ (à 0,01 près)
- E. Le nombre de bennes en surcharge à la fin de leur tournée dans un échantillon de $n = 100$ bennes (en considérant les bennes indépendantes) suit une loi binomiale

2022 Session 2

Exercice 2

On mesure la concentration d'une protéine P dans un échantillon d'individus, notée X . On notera n la taille d'échantillon. On sait que dans la population générale, cette concentration suit une loi normale de moyenne 16 U/L et d'écart-type 4,26 U/L.

Question n°6 Si l'échantillon est représentatif de la population générale, parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. Si $n = 16$, les conditions de validité du calcul de l'intervalle de pari à 95% de la moyenne de concentration de P ne sont pas vérifiées
- B. La probabilité qu'un individu de l'échantillon ait une concentration de P inférieure à 9 U/L est 0,05 (à 0,01 près)
- C. Si $n = 64$, l'intervalle de pari à 95% de la moyenne de concentration de P vaut $[15,0 ; 17,0]$ (à 0,1 près)
- D. Si $n = 128$, l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne de concentration de P vaut $[15,3 ; 16,7]$ (à 0,1 près)
- E. Quel que soit n , l'intervalle de pari à 80% de la moyenne de concentration de P est plus large que l'intervalle de pari à 90%

Question n°7 Si l'échantillon est représentatif de la population générale, parmi les propositions suivantes, laquelle est (ou lesquelles sont) exacte(s)?

- A. L'espérance de la proportion de sujets de l'échantillon avec une concentration de P supérieure à 9 U/L est 0,95 (à 0,01 près) quel que soit n
- B. Si $n = 25$, les conditions de validité du calcul de l'intervalle de pari à 95% de la proportion de sujets avec une concentration de P supérieure à 9 U/L sont vérifiées
- C. Si $n = 15$, les conditions de validité du calcul de l'intervalle de pari à 95% de la proportion de sujets avec une concentration de P supérieure à 16 U/L ne sont pas vérifiées
- D. Si $n = 25$, l'intervalle de pari à 95% de la proportion de sujets avec une concentration de P supérieure à 16 U/L est $[0,30; 0,70]$ (à 0,01 près)
- E. Si $n = 5$, les conditions de validité du calcul de l'intervalle de pari à 95% de la proportion de sujets avec une concentration de P supérieure à 16 U/L ne sont pas vérifiées

2021 Session 2

Exercice 2

On considère dans cet exercice une maladie infectieuse I . Supposons qu'une fois la maladie I déclarée chez un patient donné, la durée T pendant laquelle le patient est contaminant suit une loi exponentielle d'espérance $\mu = 4$ jours.

On considère un échantillon de taille $n = 100$ représentatif de la population de malades atteints de I . On note M_{100} la moyenne du temps pendant lequel ces 100 patients sont contaminants.

Question n°9 Parmi les propositions suivantes, **laquelle** est exacte (à 0,02 près)?

- A. L'intervalle de confiance à 90% de μ vaut $[3,5; 4,5]$
- B. L'intervalle de confiance à 95% de μ vaut $[3,2; 4,8]$
- C. L'intervalle de confiance à 95% de M_{100} vaut $[3,2; 4,8]$
- D. L'intervalle de pari à 95% de μ vaut $[3,2; 4,8]$
- E. L'intervalle de pari à 95% de M_{100} vaut $[3,2; 4,8]$