

FEUILLE DE TD 5 - OPTIMISATION A 2 VARIABLES

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0)$.
2. Trouver les extrémums locaux éventuels de f .
3. Ces extrema locaux sont-ils des extrema globaux ?
4. Mêmes questions si on rajoute la contrainte $-3 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 3$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$.

1. Montrer que f admet un et un seul extremum local, atteint en $(\frac{1}{2}, -1)$.
2. Soit (x_0, y_0) un couple de réels quelconque. En étudiant les variations de la fonction d'une variable définie par $y \rightarrow f(x_0, y)$, comparer $f(x_0, y_0)$ et $f(x_0, -1)$.
3. De la même manière, comparer $f(x_0, -1)$ et $f(\frac{1}{2}, -1)$ en étudiant les variations de la fonction d'une variable définie par $x \rightarrow f(x, -1)$.
4. f atteint-elle un extrémum global en $(\frac{1}{2}, -1)$?

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.

1. Montrer que $(0, 0)$ et $(0, 2)$ sont les uniques points stationnaires de f .
2. Déterminer la nature de ces points stationnaires.
3. Soit (x_0, y_0) un couple de réels quelconque. En étudiant les variations de la fonction d'une variable définie par $x \rightarrow f(x, y_0)$, comparer $f(x_0, y_0)$ et $f(0, y_0)$.
4. De la même manière, comparer $f(0, y_0)$ et $f(0, 0)$ en étudiant les variations de la fonction d'une variable définie par $y \rightarrow f(0, y)$.
5. Quels sont les extrema globaux de f (justifier cette réponse)? Vérifier la compatibilité de ce résultat avec celui du 2).

Exercice 4

Soit f et g les fonctions définies par $f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$ et $g(x, y, z) = f(x, y, z) + x^3$.

1. f admet-elle un maximum global? un minimum global? un minimum local? (Les réponses doivent être justifiées!).
2. Mêmes question avec g .

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^4 y^2 + x^2 + y^2 + 2$.

1. Trouver les points stationnaires de f et déterminer leur nature.
2. f atteint-elle un maximum global ?
3. f atteint-elle un minimum global ?

Exercice 6

Rappel: $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{1+x^2+y^2} - x^2 - 2y^2$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? f est-elle différentiable sur son domaine de définition ?
2. Trouver les points stationnaires de f .
3. Déterminer leur nature de la façon la plus simple possible.
4. f atteint-elle un minimum global ?
5. (*) f atteint-elle un maximum global ? (on pourra étudier la fonction $y \rightarrow f(x_0, y)$ pour x_0 un réel quelconque) .

Exercice 7

Etudier l'existence et la nature des extrema éventuels des fonctions f dans les cas suivants :

1) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

2) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2) - 4xy - 5$

3) $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$

4) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. (*indication*: utiliser les développements limités).

Exercice 8

Soit $f(x, y) = -x^3 + xy^2 + 2x - 2y$. Rechercher les extrema éventuels de la fonction f et préciser leur nature.

Exercice 18

Etudier, selon la valeur du paramètre m , l'existence et la nature des extrema de f telle que :

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 3my.$$

Exercice 9

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x, y) = mx^2 + my^2 + 2xy$. Discuter, en fonction de m , les points stationnaires de f_m et leur nature (point-col, maximum local ou minimum local).

Exercice 10

Soit f la fonction qui à tout couple de réel (x, y) associe $f(x, y) = x^4 + 2y^2 + 2x^2y - 2x^2 - 2y$.

1. Montrer que $(0, 1/2)$, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont les **seuls** points stationnaires de f .
2. Déterminer leur nature (maximum local, minimum local ou point-col).
3. f admet-elle un maximum global ?