

Dérivation-Convexité-Primitives

EXERCICE 1

Calcul de dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 5$

2. $g(x) = \frac{2x^2+3x-1}{2x-1}$

3. $h(x) = \sqrt{-4x+7}$

4. $k(x) = (3x^2 - 5x + 1)^7$

5. $p(x) = \frac{1}{(\sqrt{x-2})^5}$

CORRECTION EXERCICE 1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2x$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, g'(x) = \frac{(4x+3)(2x-1) - 2(2x^2+3x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 1}{(2x-1)^2}$$

3. $h(x) = \sqrt{-4x+7} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = -4x+7$
 $-4x+7 > 0 \iff x < \frac{7}{4}$

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $] -\infty; \frac{7}{4}[$ donc h est dérivable sur $] -\infty; \frac{7}{4}[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in] -\infty; \frac{7}{4}[, h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-4}{2\sqrt{-4x+7}} = -\frac{2}{\sqrt{-4x+7}}$$

4. $k(x) = (u(x))^7$ avec $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = 7 \times u'(x) \times (u(x))^6 = 7(6x-5)(3x^2-5x+1)^6$$

5. $p(x) = \frac{1}{(u(x))^5}$ avec $u(x) = \sqrt{x} - 2$

La fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; 4[\cup]4; +\infty[$ donc p est dérivable sur $]0; 4[\cup]4; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; 4[\cup]4; +\infty[, p'(x) = -\frac{5u'(x)}{(u(x))^6} = -5\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^6} = -\frac{5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^6}.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1. Étude de f
 - a. Déterminer l'expression de f' , la dérivée de f .
 - b. Dresser son tableau de variation.
 - c. En déduire que la fonction f admet un maximum dont on précisera la valeur exacte.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
3. Préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f .

CORRECTION EXERCICE 2

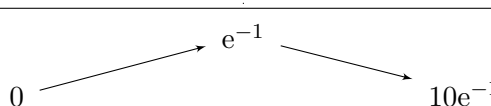
1. a. f est dérivable sur $[0 ; 10]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0 ; 10]$

$$\forall x \in [0 ; 10], f'(x) = 1 \times e^{-x} - x \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

- b. $\forall x \in [0 ; 10], e^{-x} > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 1 - x \geq 0 \\ &\iff 1 \geq x \end{aligned}$$

x	0	1	10
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f			

- c. f admet comme maximum la valeur e^{-1} , atteinte pour $x = 1$

2. f' est dérivable sur $[0 ; 10]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0 ; 10]$

$$\forall x \in [0 ; 10], f''(x) = -1 \times e^{-x} - (1 - x) \times e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$$

$f''(x)$ est du signe de $x - 2$

x	0	2	10
Signe de $f''(x)$	+	0	-
Convexité de f	concave		convexe

3. f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 2$.

$f(2) = 2e^{-2}$ donc les coordonnées du point d'inflexion de C_f sont $(2, 2e^{-2})$.

EXERCICE 3

Calculs de primitives

1. Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2x^2+8}}$. Déterminer la primitive G de g telle que $G(2) = 3$.

CORRECTION EXERCICE 3

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}^*$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme $F_k(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. g est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$g = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 2x^2 + 8$. Or une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Donc les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $G_k(x) = 2\sqrt{2x^2 + 8} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

On cherche k tel que $G_k(2) = 3$. Or $G_k(2) = 3 \iff 8 + k = 3 \iff k = -5$

La primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(2) = 3$ est définie par $G(x) = 2\sqrt{2x^2 + 8} - 5$