
UE SA03U050

**Corrigé de l'épreuve de
Mathématiques appliquées aux sciences 3**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde incluse).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.**

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Soit le système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Donner l'écriture matricielle associée au système (S) en définissant chaque grandeur introduite. Montrer que le système (S) admet une solution unique, puis résoudre (S) par la méthode de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires.

* Ecriture matricielle du système (S) : $AX = B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$* \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$\Rightarrow \det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ le système (S) admet une **solution unique**.

* Par la méthode de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires :

$$* x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} = -(-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1;$$

$$* y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} = -(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$* z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \end{array} = -(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 4) = 1.$$

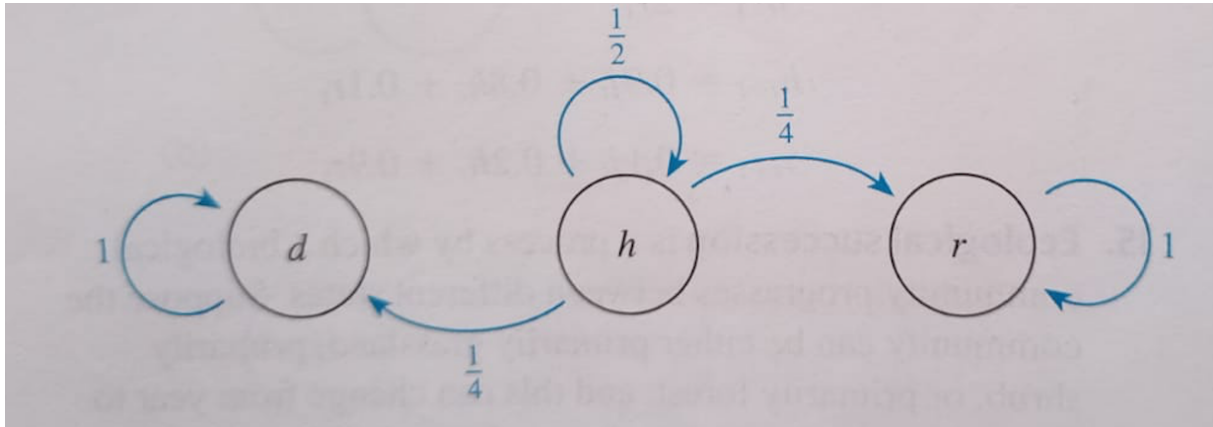
$$\Rightarrow S = \{(-1; 0; 1)\}.$$

Exercice 2

Une plante est parfois croisée avec elle-même pour générer des individus homozygotes (c'est-à-dire des individus qui portent deux copies identiques d'un gène d'intérêt). Supposons que les proportions de plants qui sont AA, Aa, et aa à la génération i sont notés respectivement par d_i , h_i et r_i . De la génération i à la génération $i + 1$:

- tous les plants AA donnent des plants AA,
- tous les plants aa donnent des plans aa,
- 50% des plants Aa donnent des plants Aa, tandis que 25% donnent des plants AA et les 25% restants donnent des plants aa.

Autrement dit, ces variables changent d'une génération à la suivante selon le diagramme suivant :



Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} d_{i+1} \\ h_{i+1} \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} d_i \\ h_i \\ r_i \end{pmatrix}, \text{ avec : } G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice G est une matrice de transition. En déduire (sans calcul) une valeur propre évidente de la matrice G .

* La matrice G est une matrice de transition car tous ses coefficients sont **positifs ou nuls** et

dans une colonne la somme de ses éléments vaut 1 : $\sum_{i=1}^3 g_{ij} = 1$ pour tout j valant 1, 2 ou 3.

* Toute matrice de transition admet **1 pour valeur propre** (toute matrice de transition admet un ou des vecteurs d'état stationnaires E tels que $GE = I \times E$).

2. Si la répartition initiale (génération 1) est : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quel sera le vecteur d'état à la génération

2, puis à la génération 3 ? Vers quelles proportions tendra la population de plants après un grand nombre de croisements ? (On pourra déterminer le vecteur d'état stationnaire associé à la matrice G sachant que par symétrie des conditions initiales les proportions de plants AA et aa tendent vers la même valeur).

* A la génération 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

* A la génération 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

* A long terme : on cherche le vecteur d'état stationnaire, c'est-à-dire associé à la valeur propre 1 de la matrice G :

$$GE = I \times E \Leftrightarrow (G - I)E = 0_{3 \times 1}.$$

$$(G - I) \begin{pmatrix} d \\ h \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ h \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}h = 0 \\ -\frac{1}{2}h = 0 \\ \frac{1}{4}h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{h = 0}.$$

Par ailleurs, E est un **vecteur d'état** $\Rightarrow d + h + r = 1$.

D'après l'énoncé, par symétrie des conditions initiales, $d = r$. Or $h = 0$.

On en déduit : $\boxed{d = r = \frac{1}{2}}$.

A long terme, la population comportera donc **50% de plants AA et 50% de plants aa**.

Exercice 3

Soit la matrice M telle que : $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice M s'écrit $P_M(\lambda) = -(\lambda + 8)(\lambda - 4)^2$.
En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice M et leur multiplicité.

$$\text{On a : } M - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ 5 & 3-\lambda & -3 \\ 10 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M s'écrit :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ 5 & 3-\lambda & -3 \\ 10 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 5 & 3-\lambda & -3 \\ 10 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$P_M(\lambda) = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & -3 \\ 10 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+\lambda & 3-\lambda & -3 \\ 12 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$P_M(\lambda) = (4-\lambda)(-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2+\lambda & -3 \\ 12 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)((2+\lambda)(-2-\lambda)+36)$$

$$P_M(\lambda) = (\lambda-4)(6^2 - (2+\lambda)^2) = (\lambda-4)(6-2-\lambda)(6+2+\lambda) = (\lambda-4)(4-\lambda)(8+\lambda)$$

$$\text{D'où : } \boxed{P_M(\lambda) = -(\lambda+8)(\lambda-4)^2}.$$

Les valeurs propres de la matrice M sont les **racines de son polynôme caractéristique**.

Ainsi la matrice M admet deux valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 = 4 \text{ valeur propre double} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -8 \text{ valeur propre simple}$$

2. Trouver l'ensemble des vecteurs propres associés à chaque valeur propre de la matrice M .

On cherche les vecteurs propres $Y \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ tels que $MY = \lambda Y \Leftrightarrow (M - \lambda I) Y = \mathbf{0}_{3 \times 1}$.

$$* \text{ Pour la valeur propre } \lambda_1 = 4 : (M - \lambda_1 I) Y_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-4 & 1 & 3 \\ 5 & 3-4 & -3 \\ 10 & -2 & -2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + y + 3z = 0 \\ 5x - y - 3z = 0 \\ 10x - 2y - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5x - y - 3z = 0 \Leftrightarrow y = 5x - 3z$$

d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 4$:

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 5x - 3z \\ z \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^{2*} \right\}$$

* Pour la valeur propre $\lambda_2 = -8$:

$$(M - \lambda_2 I) Y_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+8 & 1 & 3 \\ 5 & 3+8 & -3 \\ 10 & -2 & -2+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y + 3z = 0 \\ 5x + 11y - 3z = 0 \\ 10x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 12y = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 5x + 11y - 3z = 0 \\ -24y + 12z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + 11y - 3z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2y = -2x \\ 5x + 11y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2y = -2x \\ 5x - 11x + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2y = -2x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -8$:

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Partie B

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que cette matrice est inversible et calculer son

inverse P^{-1} par la méthode de votre choix. Calculer $P^{-1}P$ et conclure.

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 \leftarrow -C_3 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow -C_2 + C_1}{=} (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 9 = 12$$

$\det P = 12 \neq 0 \Rightarrow$ la matrice P est **inversible**.

* Inversion de la matrice P par la méthode de Cramer : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} (\text{Com } P)^T$.

Calculons la comatrice de P :

$$\text{Com } P = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

N.B. : on aurait pu utiliser un système linéaire pour inverser P .

* Calcul de $P^{-1}P$:

$$P^{-1}P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1+14-3 & -1+7-6 & 2+7-9 \\ -5+2+3 & 5+1+6 & -10+1+9 \\ 3-6+3 & -3-3+6 & 6-3+9 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}.$$

P^{-1} est bien la **matrice inverse de la matrice P** .

4. Soit la matrice A telle que : $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice D telle que $D = P^{-1} A P$. Que peut-on dire de cette matrice ?

$$D = P^{-1} A P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} A P = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} A P = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+2+3 & 1+1+6 & -2+1+9 \\ 5+6-3 & -5+3-6 & 10+3-9 \\ 10-4-2 & -10-2-4 & 20-2-6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} A P = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 12 \end{pmatrix} = \frac{4}{24} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} A P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+14-3 & 2-14+12 & 2+7-9 \\ -5+2+3 & -10-2-12 & -10+1+9 \\ 3-6+3 & 6+6-12 & 6-3+9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D \text{ est une matrice } \mathbf{diagonale}.$$