

Exercice 1

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$. (limite d'une rationnelle en l'infini).
- 2) Pour tout réel $x > 8$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\frac{-1}{x-8} \leq \frac{\sin(x)}{x-8} \leq \frac{1}{x-8}$, car $x-8 > 0$.
Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x-8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-8} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5 = 9$, par continuité.
Le tableau de signe de $4 - x^2$ est :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Signe de $4 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 4 - x^2 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 4 - x^2 = 0^-$. Ainsi $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+5}{4-x^2} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x+5}{4-x^2} = -\infty$, par quotient.

- 4) Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de $k(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$.
Pour tout réel x non nul, $k(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = \frac{e^x}{x} \times (e^x - 1)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$, par somme. Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$, par produit.
Pour tout réel x non nul, $k(x) = e^x \times \frac{(e^x - 1)}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, par continuité et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1$, par dérivabilité (voir cours). Enfin par produit $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$

- 1) A l'observation de cette courbe, on conjecture que f est croissante sur $[-4; 2]$.

Contrôle de cette conjecture

- 2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2 e^{x-1} - x = x(2e^{x-1} + xe^{x-1} - 1) = x((2+x)e^{x-1} - 1)$.
Soit $f'(x) = x \times g(x)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
- 3) Etude du signe de $g(x)$ pour x réel
- a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1 = 3e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} - 1$.
On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{x-1} = 0$, par composition et produit, ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} = 0$, par composition et croissance comparée, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ par somme.
- b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$ par composition, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{x-1} = +\infty$ par produit et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ par somme.
- c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(1+x+2) = e^{x-1}(x+3)$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $x+3$, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$. Mais $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$, d'où $g'(x)$ est positive sur $]-3; +\infty[$, négative sur $]-\infty; -3[$ et s'annule en -3 .

d) On déduit les variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variation de g	-1	$\frac{-1}{e^4} - 1$	$+\infty$

$$g(-3) = (-3 + 2)e^{-3-1} - 1 = \frac{-1}{e^4} - 1 < 0.$$

- e) $\forall x \in]-\infty; -3], g(x) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; -3]$.
 Mais sur $[-3; +\infty[$, la fonction g est continue, car dérivable, et strictement croissante. En plus $0 \in]g(-3); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$, par le corollaire des TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-3; +\infty[$.
 On a $g(0,20) \approx -0,01 < 0$ et $g(0,21) \approx 0,009 > 0$, ainsi $0,20 < \alpha < 0,21$.
- f) D'après les questions c) et d), on déduit $g(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

4) Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) On dresse le tableau de signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de x	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

- b) On déduit donc que la fonction f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; \alpha]$.
- c) La conjecture n'est pas valide, puisque la tracée de la courbe sur $[0; \alpha]$ est invisible (trop petit).
 Pour visualiser mieux la courbe, il faut zoomer sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

5) Justifier que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

$$\text{On a } f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} \text{ et } g(\alpha) = (\alpha + 2)e^{\alpha-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)e^{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}.$$

$$\text{Ainsi, } f(\alpha) = \alpha^2 \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^2}{2(\alpha+2)} - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^3 - 2\alpha^2}{2(\alpha+2)} = -\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$$