

DS-6 : Vecteurs dans l'espace - fonctions

Exercice 1

La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1)

a) Déterminer le point I de Δ de paramètre 0.

Pour $t = 0$, on obtient : $\begin{cases} x = 1 - 3 \times 0 \\ y = -2 + 2 \times 0 \\ z = -1 - 0 \end{cases}$, soit $I(1; -2; -1)$.

b) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ .

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Justifier qu'il existe un point de Δ d'abscisse 5.

On résout le système : $\begin{cases} 5 = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ y = -2 + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ z = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{14}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$, soit le point $\left(5; -\frac{14}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2) La droite Δ passe-t-elle par le point $A\left(-10; \frac{16}{3}; -\frac{14}{3}\right)$.

On résout le système : $\begin{cases} 1 - 3t = -10 \\ -2 + 2t = \frac{16}{3} \\ -1 - t = -\frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} \\ 2t = \frac{22}{3} \\ t = -1 + \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} \\ t = \frac{11}{3} \\ t = \frac{11}{3} \end{cases}$. L'unique solution est $\frac{11}{3}$, ainsi $A \in \Delta$.

3) Soit d la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -3 + s \\ y = -3 \\ z = -6 + s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$.

Démontrer que les droites Δ et d sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

On résout le système :

$$\begin{cases} 1 - 3t = -3 + s \\ -2 + 2t = -3 \\ -1 - t = -6 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3t = -3 + s \\ t = -\frac{1}{2} \\ s = -1 + \frac{1}{2} + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3t = -3 + s \\ t = -\frac{1}{2} \\ s = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \text{ et } -3 + \frac{11}{2} = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ s = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Le système admet un seul couple comme solution $\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$, donc les droites sont sécantes au point de coordonnées

$$\begin{cases} x = -3 + \frac{11}{2} \\ y = -3 \\ z = -6 + \frac{11}{2} \end{cases} \text{ soit } \left(\frac{5}{2}; -3; -\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 2

Soit ABCDEFGH un cube, I le milieu de [EB] et J le milieu de [FG].

1) $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{BG}$ par la règle du parallélogramme et le fait que J soit le milieu du segment [FG].

Aussi $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BE}$. (car I est le milieu du segment [EB]).

2) Par différence, on obtient $\vec{IJ} = \vec{BJ} - \vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{BG} - \frac{1}{2}\vec{BE}$

Soit, $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{EB} + \vec{BF}) + \frac{1}{2}\vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{BG}$.

3) On sait que les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{BG}$ ne sont pas colinéaires, on conclut donc que les trois vecteurs $\vec{IJ}$; $\vec{EF}$; $\vec{BG}$ sont coplanaires.

1) Graphiquement, on a $P\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$, $Q\left(0; 0; \frac{1}{3}\right)$, $R\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

2) On note d la droite de vecteur directeur $\vec{n}(1; -1; 1)$ passant par le point Ω , centre du cube.

a) Soient a et b deux réels non tous nuls tels que $a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b = 1 \\ \frac{2}{3}b = -1 \\ \frac{1}{3}a + b = 1 \end{cases} \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ b = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3}a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = -2 \neq 1 \end{cases}.$$

La contradiction nous permet d'assurer qu'il n'existe aucun couple $(a; b)$ tel que $a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR} = \vec{n}$.

On conclut que les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\vec{n}$ sont non coplanaires (on dit aussi qu'ils sont linéairement indépendants ou linéairement libres).

b) En déduire la position relative de la droite d et le plan (PQR).

On sait que le plan (PQR) est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ (non collinaires) et que la droite d est dirigé par $\vec{n}$, en plus ces trois vecteurs sont non coplanaires, donc la droite d ne peut être parallèle au plan (PQR), donc nécessairement sécants (un seul point commun).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \\ z = \frac{1}{2} + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

d) Montrer que le point I de coordonnées $I\left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$ est le point d'intersection de la droite d et du plan (PQR).

- I est situé sur la droite d si et seulement si le système ci-dessous admet une seule solution t (à déterminer) en remplaçant x, y et z par les coordonnées de I .

$$\begin{cases} \frac{4}{9} = \frac{1}{2} + t \\ \frac{5}{9} = \frac{1}{2} - t \\ \frac{4}{9} = \frac{1}{2} + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{18} \\ t = -\frac{1}{18} \\ t = -\frac{1}{18} \end{cases}. \text{ Ce système admet une seule solution } t = -\frac{1}{18}; \text{ ainsi } I \in d.$$

- Pour montrer que I est situé sur (PQR), il suffit de montrer que les points P, Q, R et I sont coplanaires, ce qui revient à montrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{PI}$; $\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{PR}$ sont coplanaires. Autrement dit, déterminer deux réels x et y tels que $\overrightarrow{PI} = x\overrightarrow{PQ} + y\overrightarrow{PR} (*)$.

Calculons tout d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{PI}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}; \frac{5}{9} - 0; \frac{4}{9} - 0\right)$, soit $\overrightarrow{PI}\left(\frac{1}{9}; \frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Pour cela résolvons le système suivant :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ \frac{5}{9} = \frac{2}{3}y \\ \frac{4}{9} = \frac{1}{3}x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3}x + y = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} = y \\ \frac{1}{3} \times \left(-\frac{7}{6}\right) + \frac{5}{6} = -\frac{7}{18} + \frac{5}{6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \end{cases}.$$

On a un seul couple solution de ce système à savoir $\left(-\frac{7}{6}; \frac{5}{6}\right)$, d'où $\overrightarrow{PI} = -\frac{7}{6}\overrightarrow{PQ} + \frac{5}{6}\overrightarrow{PR}$. Les trois vecteurs sont bien coplanaires, d'où le résultat.

On conclut que $I = d \cap (PQR)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, par :
$$\begin{cases} f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant soigneusement vos réponses.

1. La fonction f est continue à droite en 0.

On a $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \times e^{-\frac{1}{x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$, donc par limite de composée $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ par croissance comparée, donc par limite de composée $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} \times e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Enfin, par limite de somme, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi, La fonction f est bien continue à droite en 0. **VRAIE !!**

2. La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

Il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et par limite de composée, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ par limite de somme.

Ainsi par limite de produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 1$. **VRAIE !!**

3. La fonction f est monotone sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + 1 - \frac{1}{x}\right) = f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

Soit, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{2x-1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}} \times (2x-1)$.

Mais $f'(x)$ a le même signe que $2x-1$, car $\frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}} > 0$ pour tout $x > 0$.

Or $2x-1$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et change de signe donc f change de variation, ainsi f est non monotone sur $]0 ; +\infty[$. **FAUSSE !!**

4. On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $]0 ; 0,55[$.

On peut déduire que la courbe de f admet comme point d'inflexion le point $A\left(\frac{1}{4} ; -\frac{3}{e^4}\right)$.

On constate graphiquement que la fonction f' change de variations en $\frac{1}{4}$ (avec $\in]0 ; 0,55[$), donc la courbe de f admet bien un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{1}{4}$. Vérifions que $f\left(\frac{1}{4}\right) = (1-4)e^{-4}$, soit, $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{e^4}$. C'est bien le point $A\left(\frac{1}{4} ; -\frac{3}{e^4}\right)$ qui est recherché. **VRAIE !!**