

Exercice 1**5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 : Réponse D.

On cherche la fonction qui met en œuvre l'algorithme de dichotomie.

On peut tout de suite éliminer les propositions **B.** et **C.** : la valeur au centre de l'intervalle $[a ; b]$ n'est calculée qu'une fois, et n'est pas réactualisée.

De plus, pour la proposition **c.**, le test de la boucle "while" est incorrect : il provoque un arrêt quand l'amplitude de l'intervalle d'encadrement dépasse 0,001.

Reste à trancher entre les propositions **A.** et **D.**, qui sont quasi identiques, à l'exception des actualisations des variables a et b .

Reprenons la situation : f est continue, et strictement croissante sur $[a ; b]$ et elle s'annule en un réel α .

On a donc par croissance de f : $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

m est la valeur au centre de l'intervalle $[a ; b]$, si on a $f(m) < 0$, alors cela veut dire que $f(a)$ et $f(m)$ sont strictement négatifs tous les deux, et donc c'est sur l'intervalle $[m ; b]$ que l'on peut appliquer le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, et donc le nombre α se trouve entre m et b , donc l'étape suivante de l'algorithme doit se faire entre m et b , donc on reprendra la même démarche, en gardant la valeur b dans la variable b , et en mettant la valeur m dans la variable a . C'est la proposition **D.** qui fait cela, et pas la proposition **A.**

Question 2 : Réponse D.

Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une boule dans l'urne), le succès est « obtenir une boule verte », de probabilité $p = \frac{3}{10}$;
- cette expérience est répétée trois fois (trois tirages) de façon identique et indépendante (tirages avec remise), donc $n = 3$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{3}{10}$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{3}{10}\right)$. L'évènement « obtenir deux

boules vertes » correspond à $(X = 2)$ dans ce contexte, et par propriété, on a : $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times$

$$(1-p)^{3-2} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right) = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Question 3 : Réponse D.

Pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$.

D'une part $g(0) = \frac{a}{b + e^0} = \frac{a}{b+1} = 2$ donc $\frac{a}{b+1} = 2 \iff a = 2(b+1) = 2b+2$.

D'autre part :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$
 d'où, par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} b + e^{-t} = b$
 et donc, par quotient $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a}{b + e^{-t}} = \frac{a}{b}$
 d'où $\frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$
 On a donc $a = 2b + 2 = 3b$ d'où $b = 2$ et $a = 3 \times 2 = 6$

Question 4 : Réponse A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{ax} + ax^2 + a & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$

$$f(0) = e^0 + a \times 0^2 + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+2} = \sqrt{2}$$

f est continue en 0 si et seulement si la limite à droite est égale à $f(0)$

$$\text{d'où } a + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - 1$$

De plus f est continue sur $] -\infty ; 0]$ comme somme et composée de fonctions continues.

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions continues

Question 5 : Réponse C.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1-p)^{3-0} = (1-p)^3$$

$$\text{On a donc } (1-p)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow (1-p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow 1-p = \frac{1}{5} ; \text{ donc } p = \frac{4}{5}.$$

Exercice 2

8,5 points

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque.

On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D .

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

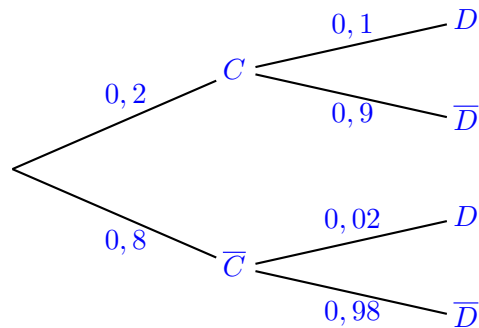
Partie 1

3,5 points

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

1 point

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



On a $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

1,5 points

Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D) \\ &= 0,02 + 0,8 \times 0,02 \\ &= 1,8 \times 0,02 \\ &= 0,036 \end{aligned}$$

La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

1 point

On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $P_D(C)$

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,02}{0,036} = \frac{5}{9} \approx 0,556 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie 2

5 points

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.

1,5 point

- On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0,036$. (d'après la question 2. de la partie 1) ;
 - On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
 - La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.
- Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

1 point

On veut calculer $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \approx 0,362 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

c. Calculer $P(X \leq 1)$.

0,5 point

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,639 \text{ à } 10^{-3} \text{ près (à la calculatrice)}$$

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

2 points

Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0,036)$.

Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n.$$

On a $1 - 0,964^{125} \approx 0,9898$ et On a $1 - 0,964^{126} \approx 0,9901$

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.

Exercice 3**15,5 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

Partie A - Étude de la fonction f **11,5 points**

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$

1 point

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty \text{ et donc par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)e^{-2x} = -\infty \\ \text{donc par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2 points

Pour tout réel x , $f(x) = 2xe^{-2x} + e^{-2x} + 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$$

Par croissance comparée on sait que : $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$

Donc par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x} = 0$

De plus par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

Donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

La droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

3. On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que, pour tout réel x

1,5 points

$$f'(x) = -4xe^{-2x}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^{-2x}$ alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 2 \times e^{-2x} + (-2e^{-2x}) \times (2x + 1) \\ &= e^{-2x} \times (2 - 2(2x + 1)) \\ &= e^{-2x}(-4x) \end{aligned}$$

4. Dédire des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1,5 points

Pour tout réel x : $e^{-2x} > 0$

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $-4x$

$$f(0) = 1e^0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

On obtient donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
variation de f			

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution. 2 points

f est dérivable donc continue sur $] -\infty ; 0]$

f est strictement croissante sur cet intervalle

$f(0) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $0 \in] -\infty ; 4]$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.

De plus, sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f décroît de 4 à 3 donc elle ne s'annule pas.

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

La table de valeurs de la calculatrice nous donne $\alpha \approx -0,8$ au dixième près.

6. On note f'' la fonction dérivée de f' .

- a. Déterminer, pour tout réel x , $f''(x)$ 1 point

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée et fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel x :

On pose $u(x) = -4x$ et $v(x) = e^{-2x}$ alors $u'(x) = -4$ et $v'(x) = -2e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\
 &= -4 \times e^{-2x} + (-2e^{-2x}) \times (-4x) \\
 &= e^{-2x} \times (-4 + 8x) \\
 &= (8x - 4)e^{-2x}
 \end{aligned}$$

- b. Étudier le signe de f'' en déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe. 1,5 points

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $8x - 4$.

$8x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Le tableau suivant donne le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe précédent, f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

- c. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées 1 point

f'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1} + 3$ donc $I\left(\frac{1}{2}; 2e^{-1} + 3\right)$

Partie B - Étude d'une fonction auxiliaire**4 points**

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-2x}$.
- a. Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $G(x) = (-x - 1)e^{-2x}$ est une primitive de la fonction g . 1 point
- G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G'(x) &= -1 \times e^{-2x} + (-2e^{-2x}) \times (-x - 1) \\ &= e^{-2x} \times (-1 + 2x + 2) \\ &= (2x + 1)e^{-2x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

- b. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. 1,5 points
- Les primitive de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :
 $F(x) = G(x) + 3x + k = (-x - 1)e^{-2x} + 3x + k, k \in \mathbb{R}$
Déterminons k pour que $F(0) = 0$:

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\Leftrightarrow -1 \times e^0 + 3 \times 0 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow -1 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

La primitive F de f qui s'annule en zéro est définie pour tout réel x par :

$$F(x) = (-x - 1)e^{-2x} + 3x + 1$$

2. a. Quelle est l'expression de F'' la dérivée seconde de F sur $\mathbb{R}$? 0,5 point
 $F' = f$ donc $F'' = f'$ car F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
- b. La courbe représentative de F admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées. 1 point
 f' s'annule et change de signe en 0 donc la courbe représentative de F admet un point d'inflexion, le point $(0; F(0))$ soit le point $(0; 0)$

Exercice 4

11 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

1 point

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{0 - 4}{0 + 3} = -\frac{4}{3}$$

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{-(-\frac{4}{3}) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

1 point

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $] - 3 ; +\infty[$ par :

2 points

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] - 3 ; +\infty[$.

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $] - 3 ; +\infty[$.

Pour tout réel $x \in] - 3 ; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{(x+3)^2} > 0 \end{aligned}$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $] - 3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

2 points

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

— **Initialisation**

Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_1 = -\frac{4}{3}$; donc on a ;

$$-2 < u_1 \leq u_0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à-dire : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leq u_n$, on se place dans l'intervalle $] -3 ; +\infty[$. Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante donc :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$f(-2) = \frac{-(-2) - 4}{-2 + 3} = -2 ; f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(u_n) = u_{n+1}$$

Donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ équivaut à $-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

On a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geq 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1 point

Pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante ;

Pour tout n , $-2 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a. Donner v_0 .

0,5 point

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

1,5 points

Pour tout entier n

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2u_n + 6}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 3}{u_n + 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} = 1$$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0,5$.

- c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

1 point

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0,5$

Donc, pour tout n non nul, $v_n = v_0 + n \times r = 0,5 + n$.

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2} \iff \frac{1}{v_n} = u_n + 2 \iff u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

Donc pour tout entier n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

1 point

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 0,5) = +\infty$ donc par inverse de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 0,5} = 0$,
et donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.