

Ex 1:

1) $x^3 = (u+v)^3$
 $= u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2$
 $= u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

2) D'après ce qui précède $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$
donc si $u^3 + v^3 = q$ et $3uv = p$ alors
 $x^3 = q + px$ soit x est solution de (E)

3) Si u et v sont solutions de (E') alors:

$$(x-u)(x-v) = x^2 - qx + \frac{p^3}{27} \text{ alors après}$$

identification on a $u+v = q$ et $uv = \frac{p^3}{27}$

soit $u^3 + v^3 = q$ et $uv = \frac{p}{3}$ donc (u, v) vérifie
le système et par 2) x est solution de (E).

(B)

1) $p = 18$ et $q = 35$

2) $(E'_1) : x^2 - 35x + 216 = 0$

on calcule $\Delta = 361$, (E'_1) admet deux
solutions réelles : $u = 8$ et $v = 27$

3) D'après (A) une solution de (E_1) est $u+v$ avec
 $u^3 = u$ et $v^3 = v$ donc $u = 2$ et $v = 3$ ainsi
une solution de (E_1) est $x = 2+3$
 $= 5$.

(C)

1) $p = 30$ et $q = -36$

2) $(E'_2) : x^2 + 36x + 1000 = 0$

(1)

3) On calcule $\Delta = -2704$ donc (E'_2) possède deux racines complexes conjuguées.

$$U = -18 + 26i \quad \text{et} \quad V = -18 - 26i$$

$$\begin{aligned} 4) (-3+i)^3 &= (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \times i + 3 \times (-3) \times i^2 + i^3 \\ &= -27 + 27i + 9 - i \\ &= -18 + 26i \end{aligned}$$

comme $(\overline{z})^3 = \overline{(z^3)}$ on a $(-3-i)^3 = -18 - 26i$

5) D'après 1A) une solut^o de (E_2) est $u+v$ avec $u^3=U$ et $v^3=V$ soit $x = (-3+i) + (-3-i) = -6$

6) On factorise $x^3 - 30x + 36$ par $x+6$ et après identifi^{cat} : $x^3 - 30x + 36 = (x+6)(x^2 - 6x + 6)$

on résout $x^2 - 6x + 6 = 0$: $\Delta = 12$ d'où

$x_1 = 3 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{3}$, finalement (E_2) possède trois solut^o réelles : $-6; 3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}$.

Ex 2:

1A) 1) Pour $n=2$ il faut $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3(4)$
on a bien le cas puisque $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$
et $35 \equiv 3(4)$.

2) a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

(2)

b) Il suffit de vérifier "à la main" que la somme de trois carrés modulo 8 n'est jamais congrue à 7 :

0+0+0 ; 0+0+1 ; 0+1+1 ; 1+1+1 ; 0+0+4 ; 0+4+4 ;
4+4+4 ; 0+1+4 ; 1+1+4 ; 1+4+4.

Pour $n=3$, il n'existe pas d'entier x, y, z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$.

13

1) $x^2+y^2+z^2+1 \equiv 0 \pmod{2^n}$ donc $x^2+y^2+z^2+1$ est pair ainsi $x^2+y^2+z^2$ est impair. Il y a équivocalité entre parité d'un entier et parité de son carré. Pour que la somme de trois entiers soit impair nécessairement ils sont tous impairs ou seulement deux d'entre eux le sont.

$$\begin{aligned} 2) a) \quad x^2+y^2+z^2 &\equiv (2q)^2 + (2r)^2 + (2s+1)^2 \pmod{4} \\ &\equiv 4(q^2+r^2+s^2+s) + 1 \pmod{4} \\ &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

b) On veut montrer que il n'existe pas d'entier x, y, z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$ pour $n > 3$.

1^{er} résultat : Si $a \equiv b \pmod{2^n}$ alors $a \equiv b \pmod{4}$
en effet si $2^n \mid a-b$ alors $4 \mid a-b$.

2nd résultat : D'après 2a) $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1(4)$ mais

$$\text{pour } n > 3 \quad 2^n - 1 \equiv -1(4) \\ \equiv 3(4)$$

Donc $x^2 + y^2 + z^2$ et $2^n - 1$ ne sont pas congrus modulo 4, ils ne peuvent l'être (1^{er} résultat) modulo 2^n .

3) a) $k^2 + k = k(k+1)$ qui est le produit de deux entiers consécutifs donc pair.

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 + y^2 + z^2 &\equiv (2q+1)^2 + (2r+1)^2 + (2s+1)^2 \pmod{8} \\ &\equiv 4(q^2+q) + 4(r^2+r) + 4(s^2+s) + 3 \pmod{8} \end{aligned}$$

or d'après a) $k^2 + k$ est pair donc $4(k^2 + k) \equiv 0(8)$

$$\text{alors } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3(8).$$

c) On raisonne de la même manière qu'en 2b).

$$\text{mais modulo 8: pour } n > 3 \quad 2^n - 1 \equiv 7(8)$$

et $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3(8)$ donc $x^2 + y^2 + z^2$ et $2^n - 1$ ne sont pas congrus modulo 8, ils ne peuvent l'être modulo 2^n .

Conclusion : Pour $n > 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$.