

Exercice 1.

Le but de l'exercice est de donner une approche de la résolution des équations de degré 3.

Partie A. Equation de la forme $x^3 = px + q$

(E) est l'équation $x^3 = px + q$ avec p et q des nombres réels.

1. x, u et v sont des nombres réels ou complexes avec $x = u + v$.
Vérifier que $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$.
2. Démontrer que si le couple $(u; v)$ vérifie le système :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ 3uv = p \end{cases}$$
 alors x est solution de (E).
3. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.
Démontrer que si U et V sont solutions de l'équation du second degré :
 $(E'): x^2 - qx + \frac{p^3}{27} = 0$ alors x est solution de (E).

Partie B. Un premier exemple.

On s'intéresse à l'équation $(E_1): x^3 = 18x + 35$.

1. Préciser les valeurs des coefficients p et q .
2. Ecrire dans ce cas l'équation du second degré (E'_1) . Résoudre cette équation.
3. En déduire alors une solution de (E_1) .

Partie C. Un second exemple.

On s'intéresse à l'équation $(E_2): x^3 = 30x - 36$.

1. Préciser les valeurs des coefficients p et q .
2. Ecrire dans ce cas l'équation du second degré (E'_2) .
3. Justifier que l'équation (E'_2) a deux solutions complexes conjuguées. Les donner.
4. Vérifier que $(-3 + i)^3 = -18 + 26i$ et $(-3 - i)^3 = -18 - 26i$.
5. Quelle solution réelle de l'équation (E_2) obtient-on de cette façon ?
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) .

Exercice 2.

Etant donné un nombre entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois nombres entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$$

Partie A. Etude de deux cas particuliers.

1. Dans cette question on suppose $n = 2$.

Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question on suppose $n = 3$.

- a. m désigne un entier naturel.

Réaliser et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

- b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$?

Partie B. Etude du cas général où $n > 3$.

On suppose qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$$

1. Justifier que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et z est impair.
On pose alors $x = 2q, y = 2r$ et $z = 2s + 1$ où q, r, s sont des entiers naturels.
 - a. Montrer que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$.
 - b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
 - b. En déduire que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$.
 - c. Conclure.