

Exercices Divisibilité-Congruences

Maths expertes

1 Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers naturels qui vérifient les équations suivantes.

a) $x^2 = y^2 + 21$

b) $x^2 - 7xy = 17$

2 Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

a) $n^2 + n = 20$

b) $n^2 + 2n = 35$

3 Déterminer les entiers relatifs n tels que :

a) $n + 3$ divise $n + 10$.

b) $n + 1$ divise $3n - 4$.

4 1. Démontrer que $(n - 4)$ divise $(n + 17)$ équivaut à $(n - 4)$ divise 21.

2. Déterminer alors toutes les valeurs de $n > 4$ telles que $\frac{n+17}{n-4}$ soit un entier.

44 Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $(n - 7)$ divise $(n^2 - n - 27)$.

45 1. Montrer que si un entier naturel d divise $(12n + 7)$ et $(3n + 1)$ alors, il divise 3.

2. En déduire que la fraction $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

47 Montrer que si n est un entier impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

48 Soit n un naturel. Démontrer que, quel que soit n , $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

51 Montrer que, si l'on soustrait à un entier naturel strictement inférieur à 100 la somme de ses chiffres, alors le résultat est divisible par 9.

52 Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que $(n + 1)$ divise $(n^2 + 5n + 4)$ et $(n^2 + 3n + 2)$.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $(n + 1)$.

3. En déduire que pour tout n , $(3n^2 + 15n + 19)$ n'est pas divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

53 On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1\,208.$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont le quotient et le reste de la division de $-1\,208$ par 51 ?

2. Quels sont le quotient et le reste de la division de $1\,208$ par 23 ?

7 Quel est le reste d'un entier impair n multiple de 3 dans la division par 6 ?

55 Soit n et p sont deux entiers naturels. On sait que le reste dans la division euclidienne de n par 11 vaut 8 et que le reste dans la division euclidienne de p par 11 vaut 7. Quel est le reste de $n + p$ dans la division euclidienne par 11 ?

56 Un entier naturel n est tel que si on le divise par 5 le reste vaut 3 et si on le divise par 6 le reste augmente de 1 et le quotient diminue de 1. Déterminer n .

60 Si l'on divise A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

32 Congruence

Pour chaque valeur de a donnée, trouver un entier relatif x tel que : $a \equiv x \pmod{7}$ et $-3 \leq x < 4$.

a) $a = 11$

b) $a = 24$

c) $a = 62$

d) $a = 85$

e) $a = -12$

f) $a = 32$

g) $a = 98$

h) $a = -47$

33 Déterminer un reste

Méthode Comment faire pour montrer que : $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$? Quels sont alors les restes dans la division euclidienne par 11 de 13^{12} et $(-2)^{19}$?

10 En remarquant que $25 \equiv -1 \pmod{13}$, montrer que pour tout entier naturel n , $5^{4n} - 1$ est divisible par 13.

11 À l'aide des congruences, déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $3^{2\,021}$.

12 Déterminer les restes possibles dans la division de n^2 par 8 suivant les valeurs de l'entier relatifs n . Résoudre alors l'équation $(n + 3)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

64 Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,012^{2\,012}$ par 11.

16 1. Déterminer, suivant les valeurs de n , les restes possibles de 5^n dans la division par 9.

2. En déduire les entiers n tels que $5^n - 1$ est divisible par 9.

3. En déduire que $212^{2\,020} \equiv 4 \pmod{9}$.

67 Montrer que pour tout entier naturel n : $(16^{2n+1} + 18^n)$ est divisible par 17.

70 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.

2. Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

3. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$.

73 On veut montrer que l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ n'a pas de solution entière.

1. On suppose qu'il existe une solution $(x; y)$.

En raisonnant modulo 5, montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme : $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.

2. Recopier puis compléter les tableaux de congruence suivants.

$x \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots \pmod{5}$					
$y \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots \pmod{5}$					

3. Montrer que x et y sont multiples de 5.

4. Conclure.

19 Soit un entier naturel tel que : $n = 10a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq b \leq 9$.

1. Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.

2. Montrer que : $n \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow a + 4b \equiv 0 \pmod{13}$.

3. Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.

4. En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants : 676, 943, 4 652, 156 556.

81 Un entier x est composé de $(n + 1)$ chiffres notés :

$a_0, a_1, \dots, a_n$.

On note alors : $x = \overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$.

1. Sachant que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, montrer que :

$$x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots) \pmod{11}.$$

2. Énoncer un critère de divisibilité par 11.

3. Déterminer, pour chacun des entiers suivants, son reste dans la division par 11.

a) 123 456 789

b) 10 891 089

c) $\underbrace{5555 \dots 5}_{100 \text{ fois}}$

d) 147 856 103

83 On appelle inverse de x modulo 5, un entier y tel que $xy \equiv 1 \pmod{5}$.

1. Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 2$.

2. Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 3$ et $x = 4$.

3. Est-ce que $x = 5$ admet un inverse ? Pourquoi ?

4. À l'aide d'un tableau de congruence, déterminer suivant la valeur de x son inverse modulo 5.

5. À l'aide de ce tableau, résoudre les équations suivantes.

a) $2x \equiv 3 \pmod{5}$

b) $9x \equiv 1 \pmod{5}$

126 Système de congruences

On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $(n - 11)$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

93 Rep-units

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11 \dots 1}_{p \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

A ► Divisibilité par 3 et 7

1. Divisibilité de N_p par 3.

a) Montrer que, pour tout entier naturel j , $10^j \equiv 1 \pmod{3}$.

b) En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_p soit divisible par 3.

2. Divisibilité de N_p par 7.

a) Compléter le tableau de congruences, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod{7}$.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b) Soit p un entier naturel non nul.

Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si, et seulement si, p est un multiple de 6. On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c) Justifier que :

pour tout entier naturel p non nul,

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9}.$$

d) On admet que :

7 divise N_p est équivalent à 7 divise $9N_p$.

En déduire que N_p est divisible par 7 si, et seulement si, p est un multiple de 6.

B ► Un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit $n \geq 2$.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, soit $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

a) Compléter le tableau de congruences.

$n \equiv \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \pmod{10}$										

b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que :

$$n = 10m + 1 \text{ ou } n = 10m - 1.$$

c) Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

2. Soit $p \geq 2$. Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour $p \geq 2$, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.