DS 7 - Dénombrement, Suites

Calculatrice autorisée.

Ne traiter les bonus qu'à la fin, s'il vous reste du temps...

Ex 1 Question de cours — 2 points

Énoncer et démontrer :

- la relation de Pascal ;
- la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.

Ex 2 Dénombrement — 8,5 points

Un sac contient dix jetons : sept noirs, numérotés de 1 à 7, et trois blancs, numérotés de 8 à 10.

1) On extrait simultanément QUATRE jetons du sac. Combien peut-on obtenir :

a) de tirages différents ?

b) de tirages comportant trois jetons noirs et un jeton blanc ?

c) de tirages dont les jetons sont de même couleur ?

d) de tirages comportant exactement un jeton impair et deux jetons noirs ?

2) On extrait CINQ jetons du sac successivement et SANS remise. Combien peut-on obtenir :

a) de tirages différents ?

b) de tirages dont le premier jeton est noir et le deuxième est blanc ?

3) On extrait SIX jetons du sac successivement et AVEC remise. Combien peut-on obtenir :

a) de tirages différents ?

b) de tirages dont les deux premiers jetons sont noirs et le troisième est blanc ?

c) de tirages avec au moins un jeton blanc ?

d) de tirages avec exactement deux jetons blancs ?

Ex 3 Dénombrement — 6 points

Soit un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1) **a)** Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cap B) = 0$.

b) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

c) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cap B) = 2$.

2) **a)** Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cup B) = 1$.

b) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cap B) = 1$ et $\text{Card}(A \cup B) = 2$.

c) Soient $p, q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p \leqslant q$.
Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\text{Card}(A \cap B) = p$ et $\text{Card}(A \cup B) = q$.

3) Bonus : Déterminer le nombre de parties de E dont le cardinal est multiple de 3.

Ex 4 Suites — 5,5 points

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

2) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

a) Démontrer que $u_n^2 + v_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

b) En déduire que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

a) Prouver que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
On note e leur limite commune.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! u_n < n! \text{e} < n! u_n + \dfrac{1}{n}$.

c) En déduire que e est irrationnel.

Ex 5 **Suite récurrente** **8 points**

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

1) **a)** Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et monotone.

b) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.

En déduire que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+k+1} - v_{n+k} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.

b) Démontrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+p+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.

c) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge.
On note α sa limite.

3) **a)** À l'aide de l'inégalité de la question **2.b**, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{e}^{2^n\alpha} \leqslant u_n + 1$.

b) En déduire que $\alpha > 0$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\mathrm{e}^{2^n\alpha}}$.

4) **Bonus :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_n = \mathrm{e}^{2^n\alpha} - u_n$.

a) Démontrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2}\,\mathrm{e}^{-2^n\alpha}$.

b) En déduire que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \mathrm{e}^{2^n\alpha} \right\rfloor$.