

Exercice 1

10 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1 :** Pour tout réel x : $1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Affirmation 1 : Vraie

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Cette solution est unique car la fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Affirmation 2 : Vraie

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}.$$

L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}$, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$.

Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} \neq 0$,

$$f(a) = 0 \iff a^2 e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$$

$$f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2 - a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Donc $a = 0$.

Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x(1 - x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x \times (1 - x^2) + e^x \times -2x = e^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1) e^x.$$

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = (-2x - 2)e^x + e^x \times (-x^2 - 2x + 1) = e^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1)e^x$$

Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe.

Or $e^x > 0$ pour tout réel x , donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. Affirmation 5 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x + x} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Affirmation 5 : Fausse

6. Affirmation 6 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + 5} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ Donc par limite de composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 5} = +\infty$
Affirmation 6 : Vraie

7. On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{2 \sin(x+3)}{x+1}.$$

Affirmation 7 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

$$\forall x \in] -1; +\infty[,$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x+3) \leq 1 \\ 2 &\geq -2 \sin(x+3) \geq -2 \\ -2 &\leq -2 \sin(x+3) \leq 2 \\ \frac{-2}{x+1} &\leq \frac{-2 \sin(x+3)}{x+1} \leq \frac{2}{x+1} \\ 5 - \frac{2}{x+1} &\leq 5 - \frac{2 \sin(x+3)}{x+1} \leq 5 + \frac{2}{x+1} \\ 5 - \frac{2}{x+1} &\leq f(x) \leq 5 + \frac{2}{x+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - \frac{2}{x+1} = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{2}{x+1} = 5$$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

Affirmation 7 : Vraie

Exercice 2**10 points****Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$, donc par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 . Interpréter graphiquement cette limite.

On a $g(x) = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = xe^x \times e^{-4} + 2e^{x-4} - 2$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4} xe^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4} = 0$, donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$.

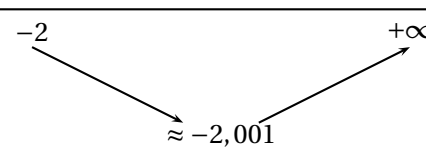
La courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ au voisinage de $-\infty$.

3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.

Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .

$$g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2) \times 1 \times e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = e^{x-4}(x+3).$$

On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
var g			

On a $g(-3) = (-3+2)e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2 \approx -2,001$.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Sur $] \infty; -3]$ la fonction g est strictement décroissante de -2 à $-e^{-7} - 2 \approx -2,001$ donc elle ne s'annule pas.

Sur l'intervalle $] -3; +\infty[$, la fonction g est dérivable donc continue et strictement croissante de plus $f(-3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Alors d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in] -3; +\infty[$

5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

- $g(\alpha) = 0$;
- sur $] -\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$

6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

La calculatrice donne $g(3,069) \approx -0,002\,006$ et $g(3,070) \approx 0,000\,38$
donc $3,069 \leq \alpha \leq 3,070$ à 10^{-3} près.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 - x^2 e^{x-4} = 0 \iff x^2 (1 - e^{x-4}) = 0 \iff \begin{cases} x^2 = 0 \text{ ou} \\ 1 - e^{x-4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ 1 = e^{x-4} \end{cases} \iff \\ \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ 0 = x - 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ 4 = x \end{cases} \\ &\text{L'équation a deux solutions : 0 et 4.} \end{aligned}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

On admet par ailleurs que, pour tout réel x , $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.

Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

De la question 5 de la partie A on déduit que :

- $f'(\alpha) = 0$;
- $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$;
- $f'(x) > 0$ sur $[0 ; \alpha[$;
- $f'(x) < 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

La fonction est donc croissante sur $[0 ; \alpha[$ et décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] \alpha ; +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{x-4} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(0) = 0;$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4};$$

$$f(x) = x^2 (1 - e^{x-4}).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{x-4} = -\infty$; d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	-	0	-	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+	-
Variations de f	$ \begin{array}{c} +\infty \quad \quad \quad f(\alpha) \\ \searrow \quad \quad \nearrow \\ 0 \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad -\infty \end{array} $			

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

D'après la question précédente sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.

On a vu à la question A. 3. que α est le réel tel que :

$$g(\alpha) = 0 \iff (\alpha + 2)e^{\alpha-4} - 2 = 0 \iff (\alpha + 2)e^{\alpha-4} = 2 \iff e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha + 2}.$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \alpha^2 (1 - e^{\alpha-4}) = \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \left(\frac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \times \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

$$\text{Finalement } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2} \approx 5,71$$

Exercice 3

10 points

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

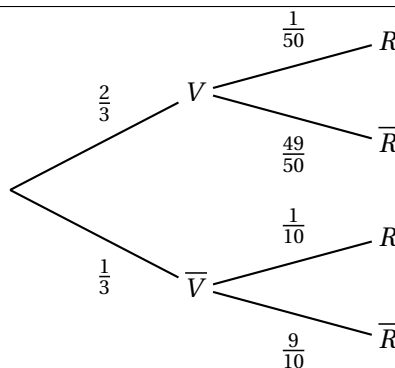
1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

- a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.



- b.** Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(V \cap R) + P(\bar{V} \cap R) \\ &= P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{2}{150} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{7}{150} \end{aligned}$$

- c.** Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

On cherche la probabilité : $P_R(V)$.

$$\text{D'après la formule de Bayes, } P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

- 2.** On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

- a.** Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. La variable aléatoire X est le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$: $X \sim \mathcal{B}\left(20; \frac{2}{3}\right)$

$$\text{Autrement dit } \forall k \in \llbracket 0 ; 20 \rrbracket, P(X = k) = \binom{20}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-k}$$

- b.** Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0,054.$$

- c.** Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,962$$

- d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo? On arrondira la réponse à l'entier.

Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,333$
En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

$$E(t) = 0,14 \times 10 + 0,13 \times 11 + 0,13 \times 12 + 0,12 \times 13 + 0,12 \times 14 + 0,11 \times 15 + 0,10 \times 16 + 0,08 \times 17 + 0,07 \times 18 = 13,5$$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.