

Exercice 1**10 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1 :** Pour tout réel x : $1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x (1 - x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5 :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$.

6. **Affirmation 6 :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + 5} = +\infty$

7. On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{2 \sin(x+3)}{x+1}.$$

Affirmation 7 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

Exercice 2**10 points****Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 . Interpréter graphiquement cette limite.
- On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
- En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet par ailleurs que, pour tout réel x , $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 3

10 points

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

- a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.
 - b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.
 - c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.
2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

- a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .
 - c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .
 - d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo? On arrondira la réponse à l'entier.
3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.