

Loi Binomiale

Exercice 1

Un supermarché possède 50 caisses. La probabilité qu'un jour donné une caisse soit en panne est $\frac{1}{20}$. Les pannes d'une caisse à l'autre se produisent de façon indépendante. On donnera les résultats à 10^{-3} près.

- 1) Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait exactement 2 caisses en panne ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 2 caisses en panne ?
- 3) Sur un grand nombre de jours combien y-a-t-il en moyenne chaque jour de caisses en panne ?

Correction exercice 1

On reconnaît un schéma binomial.

Épreuve : choisir une caisse

Succès : la caisse est en panne de probabilité $p = \frac{1}{20}$.

La variable aléatoire X est le nombre de succès à l'issue de $n = 50$ épreuves identiques et indépendantes.

Donc X suit la loi binomiale $B\left(50, \frac{1}{20}\right)$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 0 ; 50 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{50-k}$

1) $P(X = 2) = \binom{50}{2} \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{48} \approx 0.261$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un jour donné il y ait exactement 2 caisses en panne est 0,261.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

2) $P(X \geq 2) = 1 - \binom{50}{0} \times \left(\frac{1}{20}\right)^0 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{50} - \binom{50}{1} \times \left(\frac{1}{20}\right)^1 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{49}$

$$P(X \geq 2) \approx 0.727$$
 à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un jour donné il y ait au moins 2 caisses en panne est 0,727

3) $E(X) = np = 50 \times \frac{1}{20} = 2,5$. En moyenne, il y aura deux à trois caisses en panne chaque jour.

Exercice 2

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

80 personnes s'appêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
 - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. Donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

Correction exercice 2

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On reconnaît un schéma binomial.

Épreuve : une personne passe le portique

Succès : "la personne fait sonner le portique" de probabilité $p = 0,021$.

La variable aléatoire X est le nombre de succès à l'issue de $n = 50$ épreuves identiques et indépendantes.

Donc X suit la loi binomiale $B\left(80, \frac{1}{20}\right)$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 0 ; 80 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{80}{k} (0,021)^k (0,979)^{80-k}$

Autre rédaction :

On répète 80 fois de façon identique et indépendante expérience suivante : une personne passe le portique.

Il y a deux issues possibles : le succès : "la personne fait sonner le portique" de probabilité 0,021 et l'échec "la personne ne fait pas sonner le portique de probabilité 0,979 .

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès donc elle suit la loi binomiale $B(0,021; 80)$.

2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 1.68 .$$

En moyenne, sur 80 personnes il y aura entre une et deux personnes qui feront sonner le portique.

3. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
 - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0.817$$

- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

$$P(X \leq 5) \simeq 0.993$$

4. Donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

D'après le calculatrice, $P(X \leq 2) \simeq 0.763$ et $P(X \leq 3) \simeq 0.912$.

Donc $n = 3$.