

Exercice 1 **12 points : 1 + 0,5 + 1 + (2+1) + (2+0,5+0,5) + (1+0,5) + (1+1)**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_1 &= a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1\,700 - 255 + 130 = 1\,575 \\ \bullet \quad b_1 &= b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1\,300 - 130 + 255 = 1\,425 \end{aligned}$$

En 2024, il y aura 1 575 sportifs dans le club A et 1 425 dans le club B.

2. Pour tout entier naturel n , déterminer une relation liant a_n et b_n .

Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 3\,000$.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'énoncé, on a :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n.$$

Or $a_n + b_n = 3\,000$ donc $b_n = 3\,000 - a_n$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3\,000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3\,000 - \frac{10}{100}a_n \\ &= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300 \end{aligned}$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

Initialisation : Pour $n = 0$

$a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, sous cette hypothèse, $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1700$.

$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$, par hypothèse de récurrence

$0,75 \times 1200 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 0,75 \times 1700$, car $0,75 > 0$

$900 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1275$

$900 + 300 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1275 + 300$

$1200 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1575$

Or $1575 \leq 1700$ donc $1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1700$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc, pour tout entier n , $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leq a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

La suite (a_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 1200 \\ &= 0,75a_n + 300 - 1200 \\ &= 0,75a_n - 900 \\ &= 0,75 \left(a_n - \frac{900}{0,75} \right) \\ &= 0,75(a_n - 1200) \\ &= 0,75v_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,75v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$.

b. Exprimer v_n en fonction de n .

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $v_0 = 500$ donc, pour tout n , on a :
 $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - 1\,200 \Leftrightarrow a_n = v_n + 1\,200$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.

6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

$-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$.
Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times 0,75^n = 0$
Puis par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1\,200$.

b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3\,000 - 1\,200 = 1\,800$.

7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    A = 1 700  
    while A >= 1280 :  
        n = n + 1  
        A = 0.75 * A + 300  
    return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1\,280$.
A l'aide d'une calculatrice,
 $a_6 \simeq 1\,289 \geq 1\,280$ et $a_7 \simeq 1\,267 < 1\,280$
Donc la valeur de n renvoyée par la fonction `seuil` est 7.

Exercice 2

11 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;

- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A

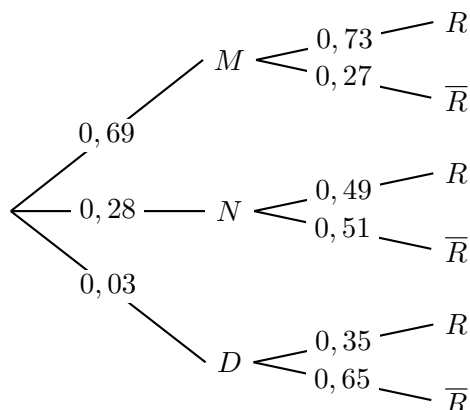
6 points : 1 + 1 + 1 + 2 + 1

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\bar{R}$ l'événement contraire de l'événement R .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

On cherche $P(D \cap R)$.

$$P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$$

La probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est bien égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P(M \cap R)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

$$P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0,69 \times 0,73 = 0,5037$$

La probabilité que le déchet soit minéral, non dangereux et recyclable est égale à 0,503 7.

4. Démontrer que la probabilité de l'événement R est $P(R) = 0,651 4$.

Les événements M , N et D forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R) = P(M \cap R) + P(N) \times P_N(R) + P(D \cap R) \\ &= 0,5037 + 0,28 \times 0,49 + 0,0105 = 0,6514 \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement R est bien égale à 0,651 4.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

On cherche $P_R(N)$.

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{686}{3257} \approx 0,2106 \quad \text{au dix-millième près.}$$

Partie B

5 points : (1+1+1) + (1+1)

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

- a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

On répète 20 fois la même expérience aléatoire « choisir un déchet » de manière identique et indépendante. Il y a deux issues :

- le succès « le déchet choisi est recyclable », de probabilité $p = 0,6514$
- l'échec « le déchet choisi n'est pas recyclable », de probabilité $1 - p = 0,3486$

X compte le nombre de succès à l'issue de ces 20 répétitions. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6514$.

- b. Donner $P(X = k)$ pour tout entier k compris entre 0 et 20.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6514$.

On a donc, pour tout entier k compris entre 0 et 20 :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times 0,6514^k \times 0,3486^{20-k}$$

- c. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

On cherche $P(X = 14)$.

$$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times 0,3486^6$$

A l'aide d'une calculatrice,

$$P(X = 14) \approx 0,1723 \text{ au dix-millième près.}$$

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

- a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6514$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times 0,3486^n = 1 \times 1 \times (1 - p)^n = 0,3486^n.$$

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchets est donc de $p_n = 0,3486^n$

- b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

La probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est :

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - p_n = 1 - 0,3486^n$$

On cherche le plus petit entier naturel n non nul tel que $1 - 0,3486^n \geq 0,9999$.

A l'aide d'une calculatrice,

$$1 - 0,3486^8 \approx 0,99978 < 0,9999 \text{ et } 1 - 0,3486^9 \approx 0,99992 \geq 0,9999.$$

On en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 3

12 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire 9 points : (1+1) + (1+1+1) + (2+1) + 1

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - 2x - 3$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$$

$$\text{Par somme et produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x - 3 = +\infty.$$

$$\text{Donc par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - 2x - 3 = +\infty$$

- b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

Pour la limite de la fonction g en $+\infty$, sous la forme actuelle, on a une forme indéterminée.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x \left(2 - 2 \frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ Par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

$$\text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{e^x} = 0.$$

$$\text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 2 \frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} = 2$$

$$\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(2 - 2 \frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} \right) = +\infty$$

2. a. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^x - 2$$

- b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

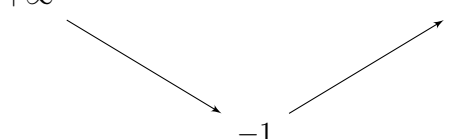
c. En déduire le tableau de variations complet de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2e^x = 2 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2e^x - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow 2e^x > 2 \\ &\Leftrightarrow e^x > \frac{2}{2} = 1 \text{ car } 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ par croissance de exp} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	$+\infty$  $+\infty$ -1		

$$g(0) = 2e^0 - 2 \times 0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -\infty ; 0]$.

- La fonction g est continue sur $] -\infty ; 0]$ car dérivable.
 - La fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $g(0) = -1$ donc on a bien $0 \in [g(0) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[$.
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -\infty ; 0]$.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

A l'aide d'une calculatrice,

$$g(-2) \simeq 1,271 > 0 \text{ et } g(-1) \simeq -0,264 < 0 \text{ donc } -2 < \alpha < -1$$

$$g(-1,2) \simeq 0,002 > 0 \text{ et } g(-1,1) \simeq -0,134 < 0 \text{ donc } -1,2 < \alpha < -1,1$$

4. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, notée β . En déduire, à l'aide des questions précédentes, le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

De plus, $g(\alpha) = 0$ et $g(\beta) = 0$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Partie B - Étude de la fonction f

3 points : 1 + 1 + 1

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times e^{2x} - (2 \times e^x + (2x+1)e^x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x - e^x = 2(e^x)^2 - 2xe^x - 3e^x \\ &= e^x(2e^x - 2x - 3) = e^x g(x) \end{aligned}$$

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-	+
Signe de $f'(x)$	+	0	-	+
Variations de f				

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

$$f'(\alpha) = e^\alpha g(\alpha) = 0 \text{ car } g(\alpha) = 0$$

$$f'(0) = e^0 g(0) = 1 \times (-1) = -1$$

$\alpha < 0$ et $f'(\alpha) > f'(0)$ donc la fonction f' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

5 points : 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$.

Cette suite :

- a. diverge vers $+\infty$
b. converge vers $\frac{2}{5}$

- c. converge vers 0
d. converge vers $\frac{1}{3}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1 \right)} = \frac{2^n}{5^n} \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{3}{5^n} + 1} = \left(\frac{2}{5} \right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{3}{5^n} + 1}$$

$-1 < \frac{2}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0$

$2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

Par quotient et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} + 1 = 1$

$5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$.

Par quotient et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5^n} + 1 = 1$

Par produit et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{3}{5^n} + 1} = 0$

Réponse c.

Question 2 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{2n+1}$.

La suite (u_n) est :

- a. arithmétique de raison 2
- b. géométrique de raison e
- c. géométrique de raison e^2
- d. convergente vers e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+2+1} = e^{2n+1+2} = e^{2n+1} \times e^2 = u_n \times e^2$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^2 .

Réponse c.

Question 3 :

On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre. On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

L'exécution de `mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie :

- a. 50
- b. 5
- c. 10
- d. 12

La fonction `mystere` renvoie la moyenne des termes d'une liste.

$$\frac{1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

`mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie donc 5.

Réponse b.

Question 4 :

Une primitive de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, est la fonction F , définie sur $\mathbb{R}$, par :

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$ | c. $F(x) = (x+1)e^x$ |
| b. $F(x) = (x-1)e^x$ | d. $F(x) = x^2e^{x^2}$ |

Prenons la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x-1)e^x$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = 1 \times e^x(x-1) \times e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x = f(x)$$

La fonction F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Réponse b.

Question 5 :

La fonction la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x-16)e^{2x}$.

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonale.

On peut affirmer que :

- | | |
|--|--|
| a. h est convexe sur $\mathbb{R}$ | c. h est concave sur $\mathbb{R}$ |
| b. $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$ | d. $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3,5$ |

Étudions le signe de $h''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 4 \times e^{2x} + (4x-16) \times 2 \times e^{2x} = 4e^{2x} + 8xe^{2x} - 32e^{2x} = (8x-28)e^{2x}$$

$$h''(x) = 8 \times e^{2x} + (8x-28) \times 2 \times e^{2x} = 8e^{2x} + 16xe^{2x} - 56e^{2x} = (16x-48)e^{2x}.$$

Sur $\mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ car exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc le signe de $h'(x)$ est le même que $16x-48$.

$$16x-48 \Leftrightarrow 16x=48 \Leftrightarrow x = \frac{48}{16} = 3$$

$16x-48$ s'annule en changeant de signe en $x = 3$, donc $h''(x) = (16x-48)e^{2x}$ aussi.

$\mathcal{C}_h$ possède donc un point d'inflexion en $x = 3$.

Réponse b.