

DS-2 : Suites numériques-Corrigé

EXERCICE 1 : $(1 + 1, 5 + 1, 5 + 1) = 5$ points

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = 2n - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On a $\lim_n 2n = +\infty$ et $\lim_n -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ par produit donc par somme $\lim_n u_n = +\infty$.

2. $u_n = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

Tout d'abord $\lim_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $0 < \frac{1}{4} < 1$), et produit et somme $\lim_n \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1$
Enfin, par produit $\lim_n u_n = 4$.

3. $u_n = \frac{-2n^2 + 10}{n^2 + 5n - 5}$.

On a une F.I, car $\lim_n (-2n^2 + 10) = -\infty$ et $\lim_n (n^2 + 5n - 5) = +\infty$. On factorise pour lever cette

indétermination, soit pour tout $n > 0$, $u_n = \frac{n^2(-2 + \frac{10}{n^2})}{n^2(1 + \frac{5}{n} - \frac{5}{n^2})} = \frac{-2 + \frac{10}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} - \frac{5}{n^2}}$. Or $\begin{cases} \lim_n (-2 + \frac{10}{n^2}) = -2 \text{ par somme} \\ \lim_n (1 + \frac{5}{n} - \frac{5}{n^2}) = 1 \text{ par somme} \end{cases}$, on déduit par quotient que $\lim_n u_n = -2$.

4. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$

$\sin n$ n'a pas de limite donc on encadre la suite pour pouvoir utiliser les théorème du cours, soit $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ pour tout $n > 0$, ainsi $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (car $n^2 > 0$), mais $\lim_n -\frac{1}{n^2} = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0$, et par le théorème d'encadrement (ou les gendarmes), $\lim_n u_n = 0$.

Exercice 2 : QCM : Indiquer sans justifier la bonne réponse.

1. On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On considère de plus une suite (t_n) qui, pour tout entier naturel n , vérifie $u_n \leq t_n \leq v_n$.

- a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

Faux, une suite géométrique s'écrit toujours sous la forme $u_0 \times q^n$.

- b. La suite (v_n) est majorée par 1

Faux, car pour tout entier naturel n , $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$ et donc $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n > 1$, soit $v_n > 1$.

- c. La suite (t_n) converge vers 1.

Vraie, en effet, $\lim_n 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_n 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, par somme et $\lim_n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$

- a. (u_n) n'est pas minorée.

Faux, car pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq 1$. Donc (u_n) est bien minorée par -1

- b. (u_n) converge.

Faux, cette suite alterne entre -1 et 1, donc divergente.

- c. La suite de terme général $\frac{u_n}{n^2}$ où $n \geq 1$ est convergente.

Vraie, en effet, pour tout $n > 0$, on a $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\lim_n -\frac{1}{n^2} = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0$, donc la suite est bien convergente vers 0.

Exercice 3 $(1,5 + 2 + 1 + (2 + 0,5 + 0,5) + (0,5 + 1)) = 9$ points

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020 + n .

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Le début de l'année 2021 correspond à $n = 1$, d'où $u_1 = 0,75 \times 0,6(1 - 0,15 \times 0,6) = 0,4095$.

Le début de l'année 2022 correspond à $n = 2$, d'où $u_2 = 0,75 \times 0,4095(1 - 0,15 \times 0,4095) \approx 0,288$.

Le nombre d'individus présents sur l'île respectivement au début de l'année 2021 et début 2022 est d'environ 410 et 288.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$, car polynôme et $\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,15 \times 0,75x$, soit $f'(x) = 0,75 - 0,225x$. Mais $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0,75}{0,225} = \frac{10}{3} > 1$ et le coefficient dominant $-0,225 < 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$, et par conséquent f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.
 $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75(1 - 0,15) = 0,6375$.

x	0	1
f	0	0,6375



3. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 1]$, l'équation $f(x) = x$. Donner la valeur exacte.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 0,75x(1 - 0,15x) = x \\ &\Leftrightarrow 0,75x - 0,1125x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow 0,25x + 0,1125x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(0,25 + 0,1125x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{-0,25}{0,1125} = \frac{-20}{9} > 1. \text{ Ainsi, L'unique solution est } 0. \end{aligned}$$

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 4.

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Pour tout entier naturel, $P(n)$ désigne la propriété « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,4095$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$, $P(n)$ est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons, pour un certain entier naturel n , que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ et montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire, $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Alors, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$, par hypothèse de récurrence ;

$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$, car f est croissante sur $[0 ; 1]$;
 $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0,6375 < 1$, car $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,6375$.
Ainsi, $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On conclut, par le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente par le théorème de la convergence monotone.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) en admettant qu'elle vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.

D'après la question (3), l'équation $f(\ell) = \ell$ a pour solutions 0 et $\frac{-2}{9} < 0$, mais on sait que $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$ et par conséquent $\ell = 0$.

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

D'après 4)c) le nombre de cette espèce décroît année après année et tend vers 0, donc l'extinction est assurée après au bout de quelques années.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous :
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def menace() :
    u = 0.6
    n = 0
    while u > 0.02 :
        u = 0.75*u*(1-0.15*u)
        n = n+1
    return n
```

la fonction menace() renvoie la valeur $n = 11$, car par la calculatrice, on obtient $u_{10} \approx 0,024$ et $u_{11} \approx 0,018$.
Interprétation : L'espèce est menacée d'extinction au bout de 11 ans (car leur nombre passe en dessous de 20 individus), soit à partir de l'an 2031.

Exercice 4 ((1 + 0,5) + (1,5 + 1) + 1,5 + 0,5) = 6 points

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

Pour $n = 0$, on a $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 2 \times 0 - 1$, soit $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{1}{2} = -0,5$.

Pour $n = 1$, on a $u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 2 \times 1 - 1$, soit $u_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} = 0,75$.

Pour $n = 2$, on a $u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2 \times 2 - 1$, soit $u_3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 3 = \frac{3}{8} + 3 = \frac{27}{8} = 3,375$.

b. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 4n + 10$.

a. Montrer que (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

On exprime v_{n+1} en fonction de v_n . Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n+1) + 10$, puis on remplace u_{n+1} par son expression, soit $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4(n+1) + 10 = \frac{1}{2}u_n - 2n + 5$, et en forçant la factorisation par $\frac{1}{2}$, nous obtenons, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10)$, d'où $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ (voir définition de v_n). La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n , puis justifier l'expression $u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme, $v_0 = u_0 - 4 \times 0 + 10 = 11$, ainsi pour tout entier naturel n , on a $v_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Aussi, $v_n = u_n - 4n + 10 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4n - 10$.

Ainsi, $u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $S_n = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}$.

$$S_n = \sum_{i=0}^n \left[11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i + 4i - 10 \right] = \sum_{i=0}^n 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=0}^n (4i - 10)$$

La première somme est celle de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique (v_n) , la deuxième est celle de $(n+1)$ d'une arithmétique de raison 4 et de premier terme -10 , d'après les propriétés (voir récapitulatif donné en début d'année),

$$\sum_{i=0}^n 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i = 11 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 22 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 22 - \frac{22}{2^{n+1}} = 22 - \frac{11}{2^n}$$

$$\sum_{i=0}^n (4i - 10) = \frac{(n+1)(-10 + 4n - 10)}{2} = \frac{2(2n - 10)(n+1)}{2} = (2n - 10)(n+1) = 2n^2 - 8n - 10$$

$$\text{Soit, } S_n = 22 - \frac{11}{2^n} + 2n^2 - 8n - 10 = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}.$$

4. Calculer la limite de la suite (S_n) .

On a $2n^2 - 8n + 12 = n \left(2n - 8 + \frac{12}{n} \right)$, (pour lever la F.I : $+\infty - \infty$).

D'une part $\begin{cases} \lim_n n = +\infty \\ \lim_n 2n - 8 + \frac{12}{n} = +\infty \end{cases}$, et par produit $\lim_n u_n = +\infty$ et d'autre part $\lim_n -\frac{11}{2^n} = 0$, car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Ainsi, par somme $\lim_n S_n = +\infty$.