

**DS-2 : Limites des suites numériques**

**EXERCICE 1**

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites  $(u_n)$  suivantes :

(1)  $u_n = 2n - \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2)  $u_n = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

(3)  $u_n = \frac{-2n^2 + 3}{n^2 + 3n - 5}$

(4)  $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$

**Exercice 2 : QCM** : Indiquer sans justifier la bonne réponse.

1. On considère les suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On considère de plus une suite  $(t_n)$  qui, pour tout entier naturel  $n$ , vérifie  $u_n \leq t_n \leq v_n$ .

- a. Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont géométriques.
  - b. La suite  $(v_n)$  est majorée par 1
  - c. La suite  $(t_n)$  converge vers 1.
2. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$
- a.  $(u_n)$  n'est pas minorée.
  - b.  $(u_n)$  converge.
  - c. La suite de terme général  $\frac{u_n}{n^2}$  où  $n \geq 1$  est convergente.

**EXERCICE 3**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020 +  $n$ .

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  et dresser son tableau de variations.

**3.** Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , l'équation  $f(x) = x$ . Donner la valeur exacte.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**4.**

**a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ .

**b.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**c.** Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  en admettant qu'elle vérifie l'équation  $f(\ell) = \ell$ .

**5.** Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

**a.** Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

**b.** Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() à ci-dessous :  
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().  
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def menace() :  
    u = 0.6  
    n = 0  
    while u > 0.02 :  
        u = 0.75*u*(1-0.15*u)  
        n = n+1  
    return n
```

#### **Exercice 4 :**

**1.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$ .

**a.** Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

**b.** Conjecturer une éventuelle limite de  $(u_n)$ .

**2.** On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - 4n + 10$ .

**a.** Montrer que  $(v_n)$  est géométrique et préciser sa raison.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$ .

**3.** Pour  $n$  entier naturel, on définit la somme  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$   
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $S_n = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}$ .

**4.** Calculer la limite de la suite  $(S_n)$ .