

Combinaison d'ondes

Calculer $\xi_t(x, t)$ l'onde résultante de la superposition des trois ondes suivantes par les deux méthodes, algébriques et de Fresnel (les marques sur le cercle correspondent à des pas de 10°).

1)

On exprimera $\xi_t(x, t)$ sous la forme $\xi_t(x, t) = A \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$

$$\xi_1(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right)}, \quad \xi_2(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx + \pi)}$$

2)

On rappelle :

$$z = a + ib = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = a^2 + b^2 \\ \tan(\theta) = \frac{b}{a} \end{cases} \begin{cases} \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta) \\ \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \end{cases}$$

$$\xi_1(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right)}, \quad \xi_2(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx + \pi)}$$

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{3} \cdot e^{i\pi} \right)$$

$$= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \cos(\pi) \right) + i \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \sin(\pi) \right) \right)$$

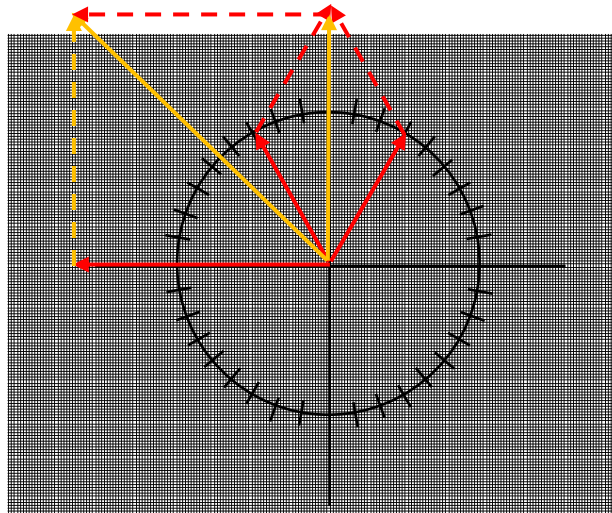
$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot 0 \right) \right)$$

$$= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \sqrt{3} \cdot (-1 + i)$$

$$z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \\ \tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1 \Rightarrow \tan(-\theta) = 1 \Rightarrow -\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sqrt{6} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$= \sqrt{6} \cdot \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right)}$$



EXERCICE II (Ondes)

On considère une corde de longueur L . Les points sur la corde sont repérés suivant un axe Ox dont l'origine est fixée sur une des extrémités de la corde. On excite cette extrémité par un mouvement vibratoire verticale d'amplitude A_0 .

1. Exprimer $A(t)$, l'équation temporelle du mouvement de cette extrémité (donc au point $x = 0$) en coordonnées complexe puis réelle. On la phase à l'origine telle que à $t = 0$, l'amplitude du point $x = 0$ est maximale (et positive).

$$A(t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$A(0) = A_0 \Rightarrow e^{i\phi} = 1 \Rightarrow \phi = 2n\pi \Rightarrow \begin{cases} A(t) = A_0 \cdot e^{i\omega t} \\ A(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

2. Exprimer $A_1(x,t)$, l'équation de propagation de l'onde produite sur la corde par cette excitation (on justifiera le choix de cette expression).

$$A_1(x,t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \text{ Propagation dans le sens des } x \text{ croissants et } A(0,0) = A_0.$$

3. On excite maintenant l'autre extrémité par le même mouvement oscillatoire (en amplitude et fréquence). On définit un nouvel axe OX orienté dans le sens opposé au précédent (Ox) et dont l'origine $X=0$ est fixée sur cette autre extrémité (au point $x = L$). Comme précédemment, on fixe la phase à l'origine telle que à $t = 0$, l'amplitude du point $X = 0$ est maximale (et positive). Exprimer $A_2(X,t)$, l'équation de propagation de l'onde produite sur la corde par cette excitation.

$$A_2(X,t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t - kX)} \text{ Propagation dans le sens des } X \text{ croissants et } A(0,0) = A_0.$$

4. En effectuant le changement de variable remplaçant X par x (Il est recommandé de vérifier que l'on obtient bien les bonnes valeurs de x pour $X=0$ et $X=L$), exprimer l'expression de $A_2(x,t)$.

$$X = L - x \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \Leftrightarrow x = L \\ X = L \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$A_2(x,t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t - k(L-x))} = A_0 \cdot e^{i(\omega t + kx - kL)}$$

5. En déduire $\Delta\phi(x_1, 0)$ le déphasage entre A_1 et A_2 pour $x=x_1$ et $t=0$.

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= A_0 \cdot e^{i(\omega t - k \cdot x)} \Rightarrow A_1(x_1, 0) = A_0 \cdot e^{-ikx_1} \\ A_2(x, t) &= A_0 \cdot e^{i(\omega t + k \cdot x - k \cdot L)} \Rightarrow A_2(x_1, 0) = A_0 \cdot e^{i(kx_1 - k \cdot L)} \\ \Delta\phi(x_1, t) &= (kx_1 - k \cdot L) - (-kx_1) = 2k \cdot x_1 - k \cdot L = k \cdot (2 \cdot x_1 - L) \end{aligned}$$

6. Démontrer que $A_T(x, t) = A_1(x, t) + A_2(x, t)$ est une onde stationnaire avec un argument qualitatif, puis par le calcul (on obtiendra une phase à l'origine temporelle et spatiale $= -k \cdot \frac{L}{2}$).

C'est une onde stationnaire car somme de deux ondes de même pulsation se propageant dans des directions opposées.

$$\begin{aligned} A_T(x, t) &= A_1(x, t) + A_2(x, t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t - k \cdot x)} + A_0 \cdot e^{i(\omega t + k \cdot x - k \cdot L)} \\ A_T(x, t) &= A_0 \cdot e^{i\omega t} \left(e^{-ik \cdot x} + e^{i(k \cdot x - k \cdot L)} \right) = A_0 \cdot e^{i\omega t} \left[e^{-i \frac{k \cdot L}{2}} \left(e^{-i \left(k \cdot x - \frac{k \cdot L}{2} \right)} + e^{i \left(k \cdot x - \frac{k \cdot L}{2} \right)} \right) \right] \\ A_T(x, t) &= A_0 \cdot e^{i \left(\omega t - \frac{k \cdot L}{2} \right)} \left[2 \cdot \cos \left(k \cdot x - \frac{k \cdot L}{2} \right) \right] \\ A_T(x, t) &= 2 \cdot A_0 \cdot \cos \left(k \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) e^{i \left(\omega t - \frac{k \cdot L}{2} \right)} \end{aligned}$$

7. La période d'oscillation est $T=2s$, la célérité des ondes formées est de 5 m.s^{-1} . Calculer la pulsation ω et λ la longueur d'onde des ondes $A_1(x, t)$ et $A_2(x, t)$.

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \pi \cdot \nu = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \text{ rad.s}^{-1} \\ \lambda &= \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi \cdot c}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{\pi} = 10 \text{ m} \end{aligned}$$

8. La longueur de la corde est de 20 m. Combien comporte-t-elle de nœuds ?

$$\begin{aligned} \cos \left(k \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) &= \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ \frac{2}{\lambda} \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right) &= n + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{\lambda} = n + \frac{1}{2} + \frac{L}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda - L \right) \\ \left. \begin{aligned} \lambda &= 10 \text{ m} \\ L &= 20 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x &= \frac{1}{2} \left(10 \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right) - 20 \right) \left\{ \begin{aligned} n=2; x &= 2,5 \text{ m} \\ n=3; x &= 7,5 \text{ m} \\ n=4; x &= 12,5 \text{ m} \\ n=5; x &= 17,5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{La corde comprends 4 noeuds} \end{aligned}$$