

N°100 p 147

Compléter et exécuter un algorithme

Au large de Cape Town en Afrique du Sud, l'organisme de protection de la vie marine a recensé 3 000 baleines au 1^{er} juin 2019.



L'espèce sera déclarée en danger dans la zone si le nombre d'individus devient inférieur à 2 000. Les observations permettent d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la zone ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la zone subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise l'évolution du nombre de baleines par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2019 + n . On a donc $u_0 = 3 000$.

1. Montrer que $u_1 = 2 926$ et que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le format des cellules est configuré pour n'afficher que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1 520$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1 520$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .

b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 480 \times 0,95^n + 1 520.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

5. Compléter la fonction Python suivante pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de baleines présentes dans la zone de Cape Town sera inférieur à 2 000.

6. L'espèce sera-t-elle déclarée en danger dans la zone un jour ? Si oui déterminer en quelle année.

```
1 def baleines():
2     u=...
3     n=...
4     while ...:
5         u=...
6         n=...
7     return(...)
```

Correction

1. u_1 correspond au nombre de cétacés au 1^{er} juin 2020

$$u_1 = (u_0 + 80) \times (1 - 5\%) \quad (80 \text{ cétacés arrivent et baisse de } 5\%)$$

$$u_1 = (3000 + 80) \times 0,95 = 2926$$

Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = 0,95u_n + 76$$

2. Dans la cellule C2 on doit saisir $= 0,95 * B2 + 76$

3. a) Pour tout entier n , on pose $H(n)$: « $u_n \geq 1520$ »

Initialisation : $u_0 = 3000 \geq 1520$ donc $H(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie : $u_n \geq 1520$

alors

$$0,95u_n \geq 0,95 \times 1520$$

$$0,95u_n + 76 \geq 1444 + 76$$

$$u_{n+1} \geq 1520$$

Donc $H(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier n

Pour tout entier n , $u_n \geq 1520$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n$$

$$= -0,05u_n + 76$$

D'après la question précédente $u_n \geq 1520$

$$-0,05u_n \leq -0,05 \times 1520$$

$$-0,05u_n + 76 \leq -76 + 76 = 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1520 donc elle converge.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1520$ alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$

$$v_{n+1} = 0,95u_n + 76 - 1520$$

$$= 0,95u_n - 1444$$

$$= 0,95 \left(u_n - \frac{1444}{0,95} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,95(u_n - 1520)$$

$$v_{n+1} = 0,95v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times 0,95^n$

et $u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0,95^n + 1520$

c) $-1 < 0,95 < 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$$

Par produit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1480 \times 0,95^n = 0$$

Par somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1480 \times 0,95^n + 1520) = 1520$$

Au bout d'un certain nombre d'années le nombre de cétacés se rapproche de 1520 individus.

```
5. def baleines():
    u=3000
    n=0
    while u>2000:
        u=0.95*u+76
        n=n+1
    return(n)

>>> baleines()
22
>>> |
```

6. En exécutant le programme précédent on obtient $n = 22$ donc l'espèce sera en danger à partir de l'année $2019 + 22 = 2041$

Sujet B p 160

Le but de ce problème est d'étudier les suites à termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel n strictement positif, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

- $u_0 > 1$;
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$;
- pour tout $n \geq 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Calculer u_1 et u_2 .

2. Pour tout entier $n > 0$, on note :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$$

On a en particulier : $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$.

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. La fonction Python ci-dessous doit retourner le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Compléter le programme.

b. Le tableau ci-dessous

donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n .

```
def algo(n,u):
    u=3
    s=u
    for i in range(...):
        u=...
        s=...
    return (u)
```

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Justifier que pour tout entier n strictement positif $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

1. $u_0 = 3$ on doit avoir $u_1 + u_0 = u_1 \times u_0$ donc $u_1 + 3 = 3u_1$

Ce qui équivaut à $2u_1 = 3$ donc $u_1 = \frac{3}{2}$

De même $u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2$ donc $3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2$

Ce qui équivaut à $\frac{9}{2}u_2 - u_2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2}u_2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{2} \times \frac{2}{7} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{7}$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = S_n + u_n$

On sait par hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ donc $S_n \geq u_0 > 1$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n = S_n \times u_n$$

De plus d'après a) on sait que $S_{n+1} = S_n + u_n$

Donc $S_n \times u_n = S_n + u_n$

$$u_n(S_n - 1) = S_n$$

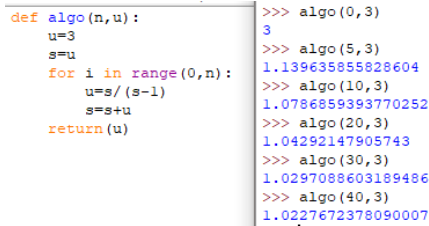
De plus $S_n > 1$

donc $u_n = \frac{S_n}{S_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n > 1$ donc $S_n - 1 > 0$ et $S_n > S_n - 1$

Donc $u_n = \frac{S_n}{S_n - 1} > 1$ et $u_0 > 1$

Pour tout entier naturel n , $u_n > 1$

3. a) 

b) (u_n) semble converger vers une valeur proche de 1

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

Or les n termes sont strictement supérieurs à 1

Donc $S_n > n$

b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{S_n}{S_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{S_n}}$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{S_n} \right) = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{S_n} \right) = 1$$

Par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

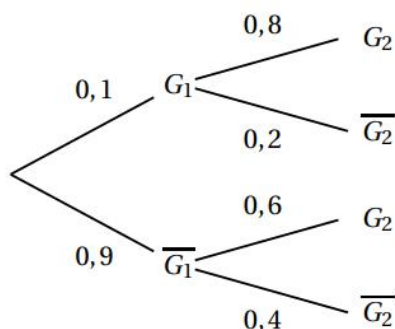
- Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n$.
- Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

1. On a l'arbre pondéré suivant :



On a $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

2. Il faut trouver $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31}$.

3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.
La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à $1 - 0,144 = 0,856$.

5. *Initialisation* : On a bien $\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15-13}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = p_1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tel que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \left[\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{3}{20} + \frac{12}{20} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

La relation est vraie au rang 1, et si elle vraie à un rang au moins égal à 1 ; elle est vraie au rang suivant.

On a donc démontré par le principe de récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{4} = 0,75$.