

34 Dans un jeu télévisé, on tire au sort des boules sans remise parmi 20 : 17 boules blanches numérotées, qui donnent le droit de deviner un mot, et 3 boules noires, qui font passer la main à l'équipe adverse.

On considère la succession des trois premiers tirages de boules dans ce jeu selon qu'elles sont noires ou non.

1. Est-ce une succession de trois épreuves indépendantes ?
2. Représenter la situation par un arbre.
3. Quelle est la probabilité de devoir passer la main exactement une fois sur les trois premiers tirages ?

35 Une urne contient 100 boules de cinq couleurs différentes : 23 blanches, 12 grises, 9 noires, 45 orange et 11 violettes.

On tire trois boules avec remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.

1. Expliquer pourquoi cette succession de trois épreuves est une succession d'épreuves indépendantes.
2. Donner l'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule grise puis une boule violette.

39 Dans un lycée, 71 % des élèves de Première ont choisi la spécialité mathématiques.

On tire au sort un élève de Première dans ce lycée et on regarde s'il a opté pour la spécialité mathématiques ou non. Expliquer en quoi cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli, préciser à quoi peut correspondre un succès puis donner la probabilité p d'un succès.

44 On considère une pièce truquée de sorte qu'elle ait deux chances sur trois de tomber sur PILE.

On lance une seule fois cette pièce et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de FACE obtenu. Justifier que X suit la loi de Bernoulli et préciser la valeur de p .

45 1. On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on considère la variable aléatoire X donnant le chiffre des dizaines du résultat obtenu. Justifier que X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p .

2. On lance deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à huit faces numérotées de 1 à 8. On considère la variable aléatoire Y donnant le chiffre des dizaines de la somme des deux nombres obtenus. Préciser la loi de Y .

50 La probabilité qu'un appel aux pompiers soit injustifié est 0,19.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de quatre appels aux pompiers, selon qu'ils sont injustifiés ou non, à un schéma de Bernoulli ?
2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité :
a) qu'exactly deux des quatre appels soit injustifiés.
b) qu'au moins un appel soit justifié.

54 À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est $\frac{18}{37}$.

On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Quelle loi suit X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité de gagner neuf parties.

56 On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

1. Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.
2. Calculer $p(M = 10)$, $p(M = 11)$ et $p(M = 12)$.
3. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année scolaire.

63 En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2 %.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont les 1 250 places ont été réservées, il est prévu 30 places pouvant accueillir les personnes en fauteuil roulant.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant ?

64 1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,83$.

Calculer l'espérance, la variance puis l'écart-type de X .

2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,79$.

67 On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(X) = 43,2$ et $V(X) = 27,648$.

1. Montrer que $1 - p = 0,64$.
2. En déduire p puis n .

69 On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(Z) = 2$ et $0,15 \leq p \leq 0,16$.

1. Donner un encadrement de n puis en déduire sa valeur.
2. En déduire p .

83 Dans une usine, les produits passent deux tests indépendants.

La probabilité qu'un produit défectueux passe le premier test est 0,12 et la probabilité qu'il passe le deuxième test est 0,08.

Un produit qui passe les deux tests est mis en vente, les autres sont détruits.

1. Quelle est la probabilité qu'un produit défectueux soit mis en vente ?
2. Sur 100 produits défectueux indépendants les uns des autres, quelle est la probabilité qu'au moins trois soient mis en vente ? Justifier.

85 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0,25$.

1. Pour quelle valeur de n a-t-on $p(X = n) \approx 9,5 \times 10^{-7}$?
2. Pour quelle valeur de n a-t-on $p(X = 0) \approx 0,0001$?

87 On considère une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0,89$.

1. Déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle $p(Z = n) > 0,01$.
2. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p(Z < n) > 0,75$.

89 Au loto, la probabilité d'obtenir le plus gros gain lors d'un tirage est $\frac{1}{19\,068\,840}$.

1. Combien de fois faut-il jouer au loto pour avoir au moins 1 % de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?
2. À raison de trois tirages par semaine, combien d'années faudrait-il jouer pour avoir au moins 1 % de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?

Intervalles et seuils

73 On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,67$.

1. L'intervalle $[2; 24]$ est-il un intervalle de fluctuation associé à X au seuil de 0,95 ?
2. L'intervalle $[13; 26]$ est-il un intervalle de fluctuation associé à X au risque de 1 % ?

100 Soit X qui suit la loi $\mathcal{B}(50; 0,12)$ et $\alpha = 0,05$. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X .

103 Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, 7 % du temps il ne mange pas à la cantine.

1. Le personnel de la cantine ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les élèves se présentant auront un repas. Déterminer k .
2. Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1 %.

107 Une compagnie aérienne doit remplir un avion de 180 fauteuils.

Comme elle sait que le taux de défection habituel (on suppose que les défections sont indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 9 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente.



1. Déterminer le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets (c'est-à-dire qu'il n'y aura pas plus de 180 personnes qui prendront finalement le vol).

2. Déterminer le nombre de billets à vendre pour qu'il y ait moins d'1 % de chance que trop de billets ait été vendus.

111 Une entreprise *high tech* annonce un taux de défaut de 3 % de ses appareils.

Un grossiste commande 1 000 appareils à cette entreprise et on appelle X le nombre d'appareils défectueux sur les 1 000, que l'on suppose indépendants.

1. D'après l'entreprise *high tech*, donner le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 99 % associé à X de la forme $[0; a]$.

2. 39 des 1 000 appareils sont retournés au grossiste pour cause de défaut.

Que peut-on penser du taux de défaut de 3 % annoncé ?

133 La bonne martingale ?

Au casino, Jamila joue à un jeu à quitte ou double c'est-à-dire que si elle joue $x \in \mathbb{R}$, son gain algébrique est de $-x \in \mathbb{R}$ si elle perd, et de $2 \times x - x = x \in \mathbb{R}$ si elle gagne.

La probabilité de gagner à ce jeu est 0,49.

Elle adopte alors la stratégie consistant à miser et :

- si elle gagne, elle quitte le casino ;
- si elle perd, elle rejoue en misant le double de ce qu'elle avait misé la fois précédente.

Jamila joue avec une 1^{re} mise de 1 000 €.

A ▶ Loi géométrique

1. a) Quelle est la probabilité que Jamila quitte le casino après une partie ?

b) Même question pour deux parties, pour trois parties puis pour k parties avec $k \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $p(X = k)$ où X est la variable aléatoire donnant le nombre de parties jouées avant de gagner.

Remarque Cette variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,49$.

2. a) Quel sera son gain algébrique si elle gagne à la première partie ?

b) Même question pour les deuxième puis troisième parties.

c) Que peut-on conjecturer sur le gain algébrique quand on gagne à la k -ième partie ?

3. On considère la suite (u_n) donnant la somme d'argent mise à la n -ième partie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Exprimer u_n en fonction de n .

b) En déduire le total des sommes mises entre la 1^{re} et la n -ième partie. Démontrer la conjecture faite en 2. c).

4. On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique réalisé à ce jeu.

a) Donner la loi de probabilité de G .

b) En quoi cela paraît-il paradoxal ? Expliquer pourquoi ça ne l'est pas réellement (on pourra se demander combien d'argent Jamila aura dépensé au bout de 10 parties).